利用导数解决函数零点问题探秘

张汝波

在紧张的高三复习备考过程中，笔者通过对导数知识的教学及研究，发现导数与函数零点问题有着非常密切的联系，很多的函数零点问题可以通过利用导数的相关知识来解决。虽然导数方法不是解决零点问题的唯一方法，也不一定是最简单的方法，但在很多时候是一种较为通用的方法，而在近几年各省的高考题中零点问题出现的频率非常高，形式也逐渐多样化，因此，寻求一种解决此类问题的通法，对于目前的高三备考有着十分重要的意义。下面笔者就零点问题的导数法谈一些粗浅认识，供大家参考。

函数零点是新课程教材新增的内容之一，根据函数零点的定义：对于函数把使成立的实数叫做函数的零点。即：方程有实根函数的图像与轴有交点（横坐标）函数有零点。由此可见，函数零点、方程的实根和函数图像交点的问题相互等价，本质上属于同一类问题，可以归结为同一题型来研究。

对简单函数的零点求解，可以利用定义或二分法求解，也可以借助函数图像、零点存在定理判断零点存在的情况。对于三次多项式函数或含有超越函数式的零点求解问题却较为复杂，利用一般方程难以解决，需要求导等方法综合应用才能有效解决。

**1. 整式（三次或二次）函数的零点问题**

问题1：(2014年新课标1第11题)已知函数=，若存在唯一的零点，且＞0，则的取值范围为( )

.（2，+∞） .（-∞，-2） .（1，+∞） .（-∞，-1）

问题2：(2012年全国卷第10题)已知函数的图像与恰有两个公共点，则＝（ ）

（A）-2或2 （B）-9或3 （C）-1或1 （D）-3或1

问题3：（2009陕西卷文科第20题节选）已知函数.若在处取得极值，直线y=m与的图象有三个不同的交点，求m的取值范围。

以上三个问题本质上均是以整式函数为背景，求字母参数的范围或值的零点问题，正是函数的图像较为简单，二次函数的图像是抛物线，三次函数的图像要么在R上单调，要么是“N”形，这类问题的求解，只需要对函数进行求导，求出极值和极值点并结合函数图像的单调情况从而确定零点或交点的情况即可确定参数的范围。

**2. 含有超越函数式的零点问题**

**（1）已知区间上有零点，求字母参数的取值范围**

问题4：**（2014四川卷第21题）已知函数，其中，为自然对数的底数。**

**（1）设是函数的导函数，求函数在区间上的最小值；**

**（2）若，函数在区间内有零点，求的取值范围**

**解析：（1）略.**

**解法一：**（2）由题设，又

若函数在区间内有零点，则函数在区间内至少有三个单调区间.

1。当或时，由（1）知，函数即在区间上单调，

不可能满足“函数在区间内至少有三个单调区间”这一要求。

2。当时，由（1）知，

令，其中（）

则。由

所以在区间上单增，在区间上单减.

即恒成立.

于是，函数在区间内至少有三个单调区间



又 所以

综上，的取值范围为

**解法二：**由题设得

故

在上有零点在有解，

记函数， 

令





 

 故

**方法感悟：**本题是已知区间上有零点，求字母参数的范围问题。由于含有超越函数式的函数图像较为复杂，也没有固定的形状特点，所以在研究此类问题时，可以从两个方面去思考：一是根据区间上零点的个数情况，估计出函数图像的大致形状，从而推导出导数需要满足的条件，进而求出参数满足的条件；另一方面，也可以先求导，通过求导分析函数的单调情况，再依据函数在区间内的零点情况，推导出函数本身需要满足的条件，此时，由于函数比较复杂，常常需要构造新函数，通过多次求导，层层推理，从而得解.

**（2）已知参数的取值范围，讨论零点个数的情况**

问题5：（2013年江苏第20题节选）设函数，，其中为实数. (2) 若在上是单调增函数，试求的零点个数，并证明你的结论.

解：（2）在上是单调增函数， 对恒成立
 即对恒成立 .

 令，则 

 则有的零点个数即为与图像交点的个数

 令 则，令，得

易知在上单调递增，在上单调递减，在时取到最大值

 当时， 当时，

 所以的近似图像如下：

1

x

y

 所以由图可知：时，有1个零点

 时，有2个零点

 时，有1个零点

 综上所述：或时，有1个零点; 时，有2个零点.

问题6：**（2013年山东第21题）设函数，(是自然对数的底数，.（1）求****的单调区间，最大值；**

**（2）讨论关于x的方程根的个数.**

解析：（1）****，令得，

当时，，函数单调递增；

当时，，函数单调递减。

所以当时，函数取得最的最大值

（2）令

当时，，则

因为，，因此在上单调递增；

②当时，，则

因为，，

又，因此在上单调递减.

综合①②可知，当时，；

当，即时，没有零点，故方程根的个数为0；

当，即时，只有一个零点，故方程根的个数为1；

当，即时，

（i）当时，由知，
要使，只需使，即

（ii）当时，由②知，
要使，只需使，即

所以时，有两个零点，故方程根的个数为2.

综上，当时，关于x的方程方程有无两个根；

当时，关于x的方程方程有一两个根；

当时，关于x的方程有两个根.

**方法感悟**：对于已知参数的取值范围，讨论零点个数的情况的问题，借助导数解决的办法也有两个：一是分离参数，得到参数与超越函数式相等的式子，借助导数分析函数的单调区间和极值，结合图形，由参数函数与超越函数的交点个数，易得交点个数的分类情况.另一办法是将方程移项，构造新函数，求导，分类讨论单调区间及其零点个数。这其中特别要注意的是在两端的单调区间内，函数不一定趋向于正负无穷，要特别小心有无上下界的情况，因此从严格意义上讲，是需要用零点存在定理证明零点的存在性的。

**（3）已知存在零点，证明零点的性质**

**问题7**：（2014天津第20题节选）已知函数，.已知函数有两个零点，且.

（Ⅰ）求的取值范围；

（Ⅱ）证明：随着的减小而增大；

（Ⅲ）证明：随着的减小而增大.

（Ⅰ）**解：**由，可得.

下面分两种情况讨论：

（1）时，在上恒成立，可得在上单调递增，不合题意.

（2）时，由，得.

当变化时，，的变化情况如下表：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  | ＋ | 0 | － |
|  | ↗ |  | ↘ |

这时，的单调递增区间是；单调递减区间是.

于是，“函数有两个零点”等价于如下条件同时成立：

1°；

2°存在，满足；

3°存在，满足.

由，即，解得，而此时，取，满足，且；取，满足，且. 所以，的取值范围是.

（Ⅱ）**证明：**由，有.

设，由，知在上单调递增，在上单调递减. 并且，当时，；当时，.

由已知，满足，. 由，及的单调性，

可得，.

对于任意的，设，，其中；，其中.

因为在上单调递增，故由，即，可得；

类似可得. 又由，得. 所以，随着的减小而增大.

（Ⅲ）**证明：**由，，可得，.

故.

设，则，且解得，.

所以，. ①

令，，则.

令，得.

当时，.因此，在上单调递增，故对于任意的，，由此可得，故在上单调递增.

因此，由①可得随着的增大而增大.

而由（Ⅱ），随着的减小而增大，所以随着的减小而增大.

**方法感悟：**已知函数存在零点，需要证明零点满足某项性质时，实际上是需要对函数零点在数值上进行精确求解或估计，需要对零点进行更高要求的研究，为此，不妨结合已知条件和未知要求，构造新的函数，再次通过导数的相关知识对函数尽进行更进一步的分析研究，其中，需要灵活运用函数思想、化归思想等，同时也需要学生有较强的抽象概括能力、综合分析问题和解决问题的能力.

总而言之，高考题中利用导数解决函数零点的问题最终都回归于函数单调性的判断，而函数的单调性，极值又与其导函数的零点有着紧密的联系，可以说函数零点的判断，导函数零点的判断，或者数值上的精确求解或估计成为导数综合应用中最为核心的问题 ．

**参考文献**：

《活跃在高考中的函数零点的问题》,李连方,《数学通讯》2O09 年第 9 期(上半月)

《2013年高考导数综合应用中的“隐零点”》,林国夫,《中学数学教学》2013年第4期

《浅析高考中的函数零点问题》,滕慧芳, 山东省章丘市第四中学

(本文发表于《新高考》2014年第12期）