

## 12 概率和统计

湖南师大附中, 数学教研组, 张湘君

1.(2007.I.18) 某商场经销某商品, 根据以往资料统计, 顾客采用的付款期数  $\xi$  的分布列为

| $\xi$ | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   |
|-------|-----|-----|-----|-----|-----|
| $P$   | 0.4 | 0.2 | 0.2 | 0.1 | 0.1 |

商场经销一件该商品, 采用 1 期付款, 其利润为 200 元; 分 2 期或 3 期付款, 其利润为 250 元; 分 4 期或 5 期付款, 其利润为 300 元.  $\eta$  表示经销一件该商品的利润.

(I) 求事件  $A$ : “购买该商品的 3 位顾客中, 至少有 1 位采用 1 期付款” 的概率  $P(A)$ ;

(II) 求  $\eta$  的分布列及期望  $E\eta$ .

2.(2007.II.14) 在某项测量中, 测量结果  $\xi$  服从正态分布  $N(1, \sigma^2)(\sigma > 0)$ . 若  $\xi$  在  $(0,1)$  内取值的概率为 0.4, 则  $\xi$  在  $(0,2)$  内取值的概率为\_\_\_\_\_.

3.(2007.II.18) 从某批产品中, 有放回地抽取产品二次, 每次随机抽取 1 件, 假设事件  $A$ : “取出的 2 件产品中至多有 1 件是二等品” 的概率  $P(A) = 0.96$ .

(1) 求从该批产品中任取 1 件是二等品的概率  $p$ ;

(2) 若该批产品共 100 件, 从中任意抽取 2 件,  $\xi$  表示取出的 2 件产品中二等品的件数, 求  $\xi$  的分布列.

4.(2008.I.20) 已知 5 只动物中有 1 只患有某种疾病，需要通过化验血液来确定患病的动物. 血液化验结果呈阳性的即为患病动物，呈阴性即没患病. 下面是两种化验方法：

方案甲：逐个化验，直到能确定患病动物为止.

方案乙：先任取 3 只，将它们的血液混在一起化验. 若结果呈阳性则表明患病动物为这 3 只中的 1 只，然后再逐个化验，直到能确定患病动物为止；若结果呈阴性则在另外 2 只中任取 1 只化验.

( I ) 求依方案甲所需化验次数不少于依方案乙所需化验次数的概率；

( II )  $\xi$  表示依方案乙所需化验次数，求  $\xi$  的期望.

5.(2008.II.6) 从 20 名男同学，10 名女同学中任选 3 名参加体能测试，则选到的 3 名同学中既有男同学又有女同学的概率为 ( )

A.  $\frac{9}{29}$

B.  $\frac{10}{29}$

C.  $\frac{19}{29}$

D.  $\frac{20}{29}$

6.(2008.II.18) 购买某种保险，每个投保人每年度向保险公司交纳保费  $a$  元，若投保人在购买保险的一年度内出险，则可以获得 10 000 元的赔偿金. 假定在一年度内有 10 000 人购买了这种保险，且各投保人是否出险相互独立. 已知保险公司在一年度内至少支付赔偿金 10 000 元的概率为  $1 - 0.999^{10^4}$ .

( I ) 求一投保人在一年度内出险的概率  $p$ ；

( II ) 设保险公司开办该项险种业务除赔偿金外的成本为 50 000 元，为保证盈利的期望不小于 0，求每位投保人应交纳的最低保费（单位：元）.

7.(2009.I.19) 甲、乙二人进行一次围棋比赛，约定先胜 3 局者获得这次比赛的胜利，比赛结束，假设在一局中，甲获胜的概率为 0.6，乙获胜的概率为 0.4，各局比赛结果相互独立，已知前 2 局中，甲、乙各胜 1 局。

(I) 求甲获得这次比赛胜利的概率；

(II) 设  $\xi$  表示从第 3 局开始到比赛结束所进行的局数，求  $\xi$  得分布列及数学期望.

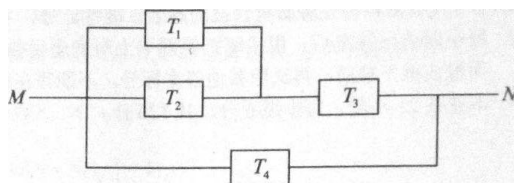
8.(2009.II.20) 某车间甲组有 10 名工人，其中有 4 名女工人；乙组有 5 名工人，其中有 3 名女工人，现采用分层抽样方法（层内采用不放回简单随机抽样）从甲、乙两组中共抽取 3 名工人进行技术考核。

(I) 求从甲、乙两组各抽取的人数；

(II) 求从甲组抽取的工人中恰有 1 名女工人的概率；

(III) 记  $\xi$  表示抽取的 3 名工人中男工人数，求  $\xi$  的分布列及数学期望。

9.(2010.I.20) 如图，由  $M$  到  $N$  的电路中有 4 个元件，分别标为  $T_1, T_2, T_3, T_4$ ，电流能通过  $T_1, T_2, T_3$  的概率都是  $p$ ，电流能通过  $T_4$  的概率是 0.9. 电流能否通过各元件相互独立. 已知  $T_1, T_2, T_3$  中至少有一个能通过电流的概率为 0.999.



(I) 求  $p$ ;

(II) 求电流能在  $M$  与  $N$  之间通过的概率；

(III)  $\xi$  表示  $T_1, T_2, T_3, T_4$  中能通过电流的元件个数，求  $\xi$  的期望.

10.(2011.I.4) 有 3 个兴趣小组，甲、乙两位同学各自参加其中一个小组，每位同学参加各个小组的可能性相同，则这两位同学参加同一个兴趣小组的概率为 ( )

- A.  $\frac{1}{3}$                       B.  $\frac{1}{2}$                       C.  $\frac{2}{3}$                       D.  $\frac{3}{4}$

11.(2011.I.19) 某种产品的质量以其质量指标值衡量，质量指标值越大表明质量越好，且质量指标值大于或等于 102 的产品为优质品，现用两种新配方（分别称为 A 配方和 B 配方）做试验，各生产了 100 件这种产品，并测量了每件产品的质量指标值，得到下面试验结果：

A 配方的频数分布表

| 指标值分组 | [90, 94) | [94, 98) | [98, 102) | [102, 106) | [106, 110] |
|-------|----------|----------|-----------|------------|------------|
| 频数    | 8        | 20       | 42        | 22         | 8          |

B 配方的频数分布表

| 指标值分组 | [90, 94) | [94, 98) | [98, 102) | [102, 106) | [106, 110] |
|-------|----------|----------|-----------|------------|------------|
| 频数    | 4        | 12       | 42        | 32         | 10         |

(I) 分别估计用 A 配方，B 配方生产的产品的优质品率；

(II) 已知用 B 配方生成的一件产品的利润  $y$  (单位：元) 与其质量指标值  $t$  的关系式为

$$y = \begin{cases} -2, & t < 94, \\ 2, & 94 \leq t < 102, \\ 4, & t \geq 102. \end{cases}$$

从用 B 配方生产的产品中任取一件，其利润记为  $X$  (单位：元)，求  $X$  的分布列及数学期望.

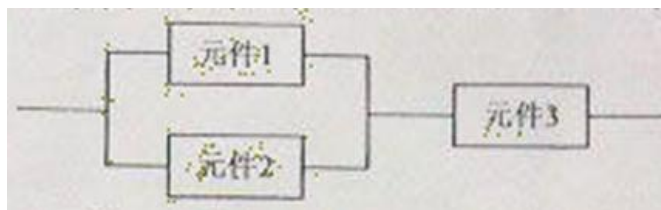
(以试验结果中质量指标值落入各组的频率作为一件产品的质量指标值落入相应组的概率)

12.(2011.II.18) 根据以往统计资料，某地车主购买甲种保险的概率为 0.5，购买乙种保险但不购买甲种保险的概率为 0.3, 设各车主购买保险相互独立.

(I) 求该地 1 位车主至少购买甲、乙两种保险中的 1 种的概率；

(II)  $X$  表示该地的 100 位车主中, 甲、乙两种保险都不购买的车主数. 求  $X$  的期望.

13.(2012.I.15) 某个部件由三个元件按下图方式连接而成，元件 1 或元件 2 正常工作，且元件 3 正常工作，则部件正常工作，设三个电子元件的使用寿命（单位：小时）均服从正态分布  $N(1000, 50^2)$ ，且各个元件能否正常相



互独立，那么该部件的使用寿命超过 1000 小时的概率为\_\_\_\_\_.

14.(2012.I.18) 某花店每天以每枝 5 元的价格从农场购进若干枝玫瑰花，然后以每枝 10 元的价格出售，如果当天卖不完，剩下的玫瑰花作垃圾处理。

(1) 若花店一天购进 16 枝玫瑰花，求当天的利润  $y$  (单位：元) 关于当天需求量  $n$

(单位：枝， $n \in N$ ) 的函数解析式。

(2) 花店记录了 100 天玫瑰花的日需求量（单位：枝），整理得下表：

|          |    |    |    |    |    |    |    |
|----------|----|----|----|----|----|----|----|
| 日需求量 $n$ | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 频 数      | 10 | 20 | 16 | 16 | 15 | 13 | 10 |

以 100 天记录的各需求量的频率作为各需求量发生的概率。

(i) 若花店一天购进 16 枝玫瑰花， $X$  表示当天的利润（单位：元），求  $X$  的分布列，数学期望及方差；

(ii) 若花店计划一天购进 16 枝或 17 枝玫瑰花，你认为应购进 16 枝还是 17 枝？请说明理由。

15.(2012.II.19) 乒乓球比赛规则规定：一局比赛，双方比分在 10 平前，一方连续发球 2 次后，对方再连续发球 2 次，依次轮换，每次发球，胜方得 1 分，负方得 0 分。设在甲、乙的比赛中，每次发球，发球方得 1 分的概率为 0.6，各次发球的胜负结果相互独立，。甲、乙的一局比赛中，甲先发球。

(1) 求开始第 4 次发球时，甲、乙的比分为 1 比 2 的概率；

(2)  $\xi$  表示开始第 4 次发球时乙的得分，求  $\xi$  的期望。

16.(2012.I.3) 为了解某地区的中小学生视力情况,拟从该地区的中小学生中抽取部分学生进行调查,事先已了解到该地区小学.初中.高中三个学段学生的视力情况有较大差异,而男女生视力情况差异不大,在下面的抽样方法中,最合理的抽样方法是 ( )

- A.简单随机抽样      B.按性别分层抽样      C.按学段分层抽样      D.系统抽样

17.(2013.I.19) 一批产品需要进行质量检验,检验方案是:先从这批产品中任取 4 件作检验,这 4 件产品中优质品的件数记为  $n$ .如果  $n=3$ ,再从这批产品中任取 4 件作检验,若都为优质品,则这批产品通过检验;如果  $n=4$ ,再从这批产品中任取 1 件作检验,若为优质品,则这批产品通过检验;其他情况下,这批产品都不能通过检验。

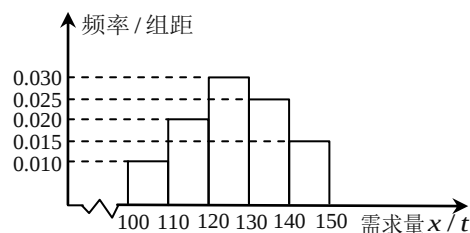
假设这批产品的优质品率为 50%,即取出的产品是优质品的概率都为  $\frac{1}{2}$ ,且各件产品是否为优质品相互独立.

(1) 求这批产品通过检验的概率;

(2) 已知每件产品检验费用为 100 元,凡抽取的每件产品都需要检验,对这批产品作质量检验所需的费用记为  $X$  (单位:元),求  $X$  的分布列及数学期望。

18.(2013.II.14) 从  $n$  个正整数  $1, 2, \dots, n$  中任意取出两个不同的数,若取出的两数之和等于 5 的概率为  $\frac{1}{14}$ , 则  $n =$  \_\_\_\_\_.

19.(2013.II.19) 经销商经销某种农产品,在一个销售季度内,每售出 1t 该产品获利润 500 元,未售出的产品,每 1t 亏损 300 元.根据历史资料,得到销售季度内市场需求量的频率分布直方图,如图所示.经销商为下一个销售季度购进了 130t 该农产品,以  $X$  (单位: t,  $100 \leq X \leq 150$ ) 表示下一个销售季度内的市场需求量,  $T$  (单位: 元) 表示下一个销售季度内销商该农产品的利润.

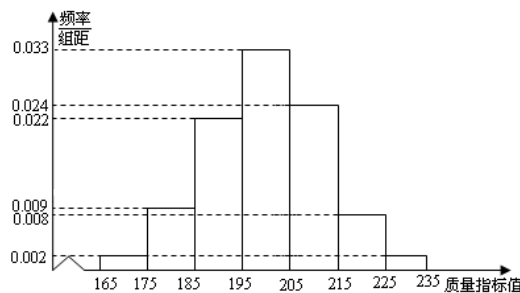


(I) 将  $T$  表示为  $X$  的函数;

(II) 根据直方图估计利润  $T$  不少于 57000 元的概率;

(III) 在直方图的需求量分组中,以各组的区间中点值代表该组的各个值,需求量落入该区间的频率作为需求量取该区间中点值的概率(例如:若  $X \in [100, 110)$ ,则取  $X = 105$ ,且  $X = 105$  的概率等于需求量落入  $[100, 110)$  的概率),求利润  $T$  的数学期望.

20.(2014.I.18) 从某企业的某种产品中抽取 500 件，测量这些产品的一项质量指标值，由测量结果得如下频率分布直方图：



(I) 求这 500 件产品质量指标值的样本平均数  $\bar{x}$  和样

本方差  $s^2$  (同一组数据用该区间的中点值作代表)；

(II) 由频率分布直方图可以认为，这种产品的质量

指标值  $Z$  服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ ，其中  $\mu$  近似为样本平均数  $\bar{x}$ ， $\sigma^2$  近似为样本方差  $s^2$ 。

(i) 利用该正态分布，求  $P(187.8 < Z < 212.2)$ ；

(ii) 某用户从该企业购买了 100 件这种产品，学科网记  $X$  表示这 100 件产品中质量指标值为于区间  $(187.8, 212.2)$  的产品件数，利用 (i) 的结果，求  $EX$ 。

附： $\sqrt{150} \approx 12.2$ 。若  $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，则  $P(\mu - \sigma < Z < \mu + \sigma) = 0.6826$ ，

$P(\mu - 2\sigma < Z < \mu + 2\sigma) = 0.9544$ 。

21.(2014.II.5) 某地区空气质量监测资料表明，一天的空气质量为优良学科网的概率是 0.75，连续两为优良的概率是 0.6，已知某天的空气质量为优良，则随后一天的空气质量为优良的概率是 ( )

A. 0.8

B. 0.75

C. 0.6

D. 0.45

22.(2014.II.19) 某地区 2007 年至 2013 年农村居民家庭纯收入  $y$  (单位：千元) 的数据如下表：

|           |      |      |      |      |      |      |      |
|-----------|------|------|------|------|------|------|------|
| 年份        | 2007 | 2008 | 2009 | 2010 | 2011 | 2012 | 2013 |
| 年份代号 $t$  | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    |
| 人均纯收入 $y$ | 2.9  | 3.3  | 3.6  | 4.4  | 4.8  | 5.2  | 5.9  |

(I) 求  $y$  关于  $t$  的线性回归方程；

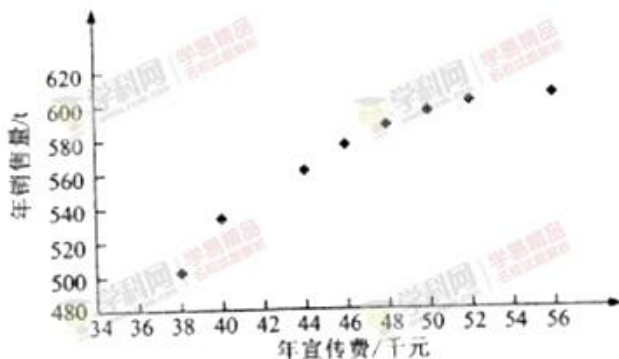
(II) 利用 (I) 中的回归方程，分析 2007 年至 2013 年该地区农村居民家庭人均纯收入的变化情况，并预测该地区 2015 年农村居民家庭人均纯收入。

附：回归直线的斜率和截距的最小二乘法估计公式分别为：
$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2}, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{t}$$

22.(2015.I.4) 投篮测试中, 每人投 3 次, 至少投中 2 次才能通过测试。已知某同学每次投篮投中的概率为 0.6, 且各次投篮是否投中相互独立, 则该同学通过测试的概率为( )

- A. 0.648                      B. 0.432                      C. 0.36                      D. 0.312

23.(2015.I.19) 某公司为确定下一年度投入某种产品的宣传费, 需了解年宣传费  $x$  (单位: 千元) 对年销售量  $y$  (单位:  $t$ ) 和年利润  $z$  (单位: 千元) 的影响, 对近 8 年的年宣传费  $x_i$  和年销售量  $y_i$  ( $i=1,2, \dots, 8$ ) 数据作了初步处理, 得到下面的散点图及一些统计量的值.



| $\bar{x}$ | $\bar{y}$ | $\bar{w}$ | $\sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})^2$ | $\sum_{i=1}^8 (w_i - \bar{w})^2$ | $\sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ | $\sum_{i=1}^8 (w_i - \bar{w})(y_i - \bar{y})$ |
|-----------|-----------|-----------|----------------------------------|----------------------------------|-----------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| 46.6      | 56.3      | 6.8       | 289.8                            | 1.6                              | 1469                                          | 108.8                                         |

表中  $w_i = \sqrt{x_i}$ ,  $\bar{w} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 w_i$

(I) 根据散点图判断,  $y=a+bx$  与  $y=c+d\sqrt{x}$  哪一个适宜作为年销售量  $y$  关于年宣传费  $x$  的回归方程类型? (给出判断即可, 不必说明理由)

(II) 根据 (I) 的判断结果及表中数据, 建立  $y$  关于  $x$  的回归方程;

(III) 已知这种产品的年利率  $z$  与  $x$ 、 $y$  的关系为  $z=0.2y-x$ . 根据 (II) 的结果回答下列问题:

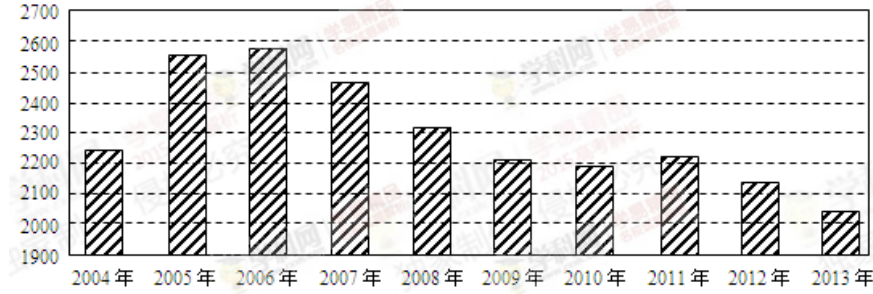
(i) 年宣传费  $x=49$  时, 年销售量及年利润的预报值是多少?

(ii) 年宣传费  $x$  为何值时, 年利率的预报值最大?

附: 对于一组数据  $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_n, v_n)$ , 其回归线  $v = \alpha + \beta u$  的斜率和截距的最小二

乘估计分别为:  $\beta = \frac{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})}{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2}$ ,  $\alpha = \bar{v} - \beta \bar{u}$

24.(2015.II.3) 根据下面给出的 2004 年至 2013 年我国二氧化硫排放量（单位：万吨）柱形图。以下结论不正确的是 ( )



- A. 逐年比较，2008 年减少二氧化硫排放量的效果最显著
- B. 2007 年我国治理二氧化硫排放显现
- C. 2006 年以来我国二氧化硫年排放量呈减少趋势
- D. 2006 年以来我国二氧化硫年排放量与年份正相关

25.(2015.II.18) 某公司为了了解用户对其产品的满意度，从 A，B 两地区分别随机调查了 20 个用户，得到用户对产品的满意度评分如下：

A 地区：62 73 81 92 95 85 74 64 53 76  
 78 86 95 66 97 78 88 82 76 89  
 B 地区：73 83 62 51 91 46 53 73 64 82  
 93 48 65 81 74 56 54 76 65 79

(I) 根据两组数据完成两地区用户满意度评分的茎叶图，并通过茎叶图比较两地区满意度评分的平均值及分散程度（不要求计算出具体值，得出结论即可）；



(II) 根据用户满意度评分，将用户的满意度从低到高分三个等级：

|       |         |            |          |
|-------|---------|------------|----------|
| 满意度评分 | 低于 70 分 | 70 分到 89 分 | 不低于 90 分 |
| 满意度等级 | 不满意     | 满意         | 非常满意     |

记事件 C：“A 地区用户的满意度等级高于 B 地区用户的满意度等级”。假设两地区用户的评价结果相互独立。根据所给数据，以事件发生的频率作为相应事件发生的概率，求 C 的概率。

## 12 概率和统计

湖南师大附中, 数学教研组, 张湘君

1.(2007.I.18) 某商场经销某商品, 根据以往资料统计, 顾客采用的付款期数  $\xi$  的分布列为

| $\xi$ | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   |
|-------|-----|-----|-----|-----|-----|
| $P$   | 0.4 | 0.2 | 0.2 | 0.1 | 0.1 |

商场经销一件该商品, 采用 1 期付款, 其利润为 200 元; 分 2 期或 3 期付款, 其利润为 250 元; 分 4 期或 5 期付款, 其利润为 300 元.  $\eta$  表示经销一件该商品的利润.

(I) 求事件  $A$ : “购买该商品的 3 位顾客中, 至少有 1 位采用 1 期付款” 的概率  $P(A)$ ;

(II) 求  $\eta$  的分布列及期望  $E\eta$ .

分析: (I) 由  $A$  表示事件 “购买该商品的 3 位顾客中至少有 1 位采用 1 期付款”.

知  $\bar{A}$  表示事件 “购买该商品的 3 位顾客中无人采用 1 期付款”

$$P(\bar{A}) = (1 - 0.4)^3 = 0.216, \quad P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0.216 = 0.784.$$

(II)  $\eta$  的可能取值为 200 元, 250 元, 300 元.

$$P(\eta = 200) = P(\xi = 1) = 0.4,$$

$$P(\eta = 250) = P(\xi = 2) + P(\xi = 3) = 0.2 + 0.2 = 0.4,$$

$$P(\eta = 300) = 1 - P(\eta = 200) - P(\eta = 250) = 1 - 0.4 - 0.4 = 0.2.$$

$\eta$  的分布列为

| $\eta$ | 200 | 250 | 300 |
|--------|-----|-----|-----|
| $P$    | 0.4 | 0.4 | 0.2 |

$$E\eta = 200 \times 0.4 + 250 \times 0.4 + 300 \times 0.2 = 240 \text{ (元)}.$$

2.(2007.II.14) 在某项测量中, 测量结果  $\xi$  服从正态分布  $N(1, \sigma^2)$  ( $\sigma > 0$ ). 若  $\xi$  在 (0,1) 内取值的概率为 0.4, 则  $\xi$  在 (0,2) 内取值的概率为\_\_\_\_\_.

分析: 0.8.

3.(2007.II.18) 从某批产品中, 有放回地抽取产品二次, 每次随机抽取 1 件, 假设事件  $A$ : “取出的 2 件产品中至多有 1 件是二等品” 的概率  $P(A) = 0.96$ .

(1) 求从该批产品中任取 1 件是二等品的概率  $p$ ;

(2) 若该批产品共 100 件, 从中任意抽取 2 件,  $\xi$  表示取出的 2 件产品中二等品的件数, 求  $\xi$  的分布列.

分析: (1) 记  $A_0$  表示事件“取出的 2 件产品中无二等品”,  $A_1$  表示事件“取出的 2 件产品中恰有 1 件二等品”. 则  $A_0, A_1$  互斥, 且  $A = A_0 + A_1$ , 故

$$P(A) = P(A_0 + A_1) = P(A_0) + P(A_1) = (1-p)^2 + C_2^1 p(1-p) = 1-p^2$$

于是  $0.96 = 1-p^2$ . 解得  $p_1 = 0.2, p_2 = -0.2$  (舍去).

(2)  $\xi$  的可能取值为 0, 1, 2. 若该批产品共 100 件, 由 (1) 知其二等品有  $100 \times 0.2 = 20$  件,

故  $P(\xi = 0) = \frac{C_{80}^2}{C_{100}^2} = \frac{316}{495}$ .  $P(\xi = 1) = \frac{C_{80}^1 C_{20}^1}{C_{100}^2} = \frac{160}{495}$ .  $P(\xi = 2) = \frac{C_{20}^2}{C_{100}^2} = \frac{19}{495}$ . 所以  $\xi$  的分布列为

|       |                   |                   |                  |
|-------|-------------------|-------------------|------------------|
| $\xi$ | 0                 | 1                 | 2                |
| $P$   | $\frac{316}{495}$ | $\frac{160}{495}$ | $\frac{19}{495}$ |

4.(2008.I.20) 已知 5 只动物中有 1 只患有某种疾病, 需要通过化验血液来确定患病的动物. 血液化验结果呈阳性的即为患病动物, 呈阴性即没患病. 下面是两种化验方法:

方案甲: 逐个化验, 直到能确定患病动物为止.

方案乙: 先任取 3 只, 将它们的血液混在一起化验. 若结果呈阳性则表明患病动物为这 3 只中的 1 只, 然后再逐个化验, 直到能确定患病动物为止; 若结果呈阴性则在另外 2 只中任取 1 只化验.

(I) 求依方案甲所需化验次数不少于依方案乙所需化验次数的概率;

(II)  $\xi$  表示依方案乙所需化验次数, 求  $\xi$  的期望.

分析: (I) 解: 设  $A_1, A_2$  分别表示依方案甲需化验 1 次、2 次.  $B_1, B_2$  表示依方案乙需化验 2 次、3 次;  $A$  表示依方案甲所需化验次数不少于依方案乙所需化验次数.

依题意知  $A_2$  与  $B_2$  独立, 且  $\bar{A} = A_1 + A_2 B$

$$P(A_1) = \frac{1}{C_5^1} = \frac{1}{5}, P(A_2) = \frac{A_4^1}{A_5^2} = \frac{1}{5}, P(B_2) = \frac{C_4^2 \cdot C_2^1}{C_5^3 \cdot C_3^1} = \frac{2}{5}$$

$$P(\bar{A}) = P(A_1 + A_2 B_2) = P(A_1) + P(A_2) \cdot P(B_2) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{7}{25}$$

$$\therefore P(A) = 1 - P(\bar{A}) = \frac{8}{25} = 0.72$$

$$(II) \xi \text{ 的可能取值为 } 2, 3. P(B_1) = \frac{C_4^3}{C_5^3} + \frac{C_4^2}{C_5^3 \cdot C_3^1} = \frac{3}{5}, P(B_2) = \frac{2}{5};$$

$$\therefore P(\xi = 2) = P(B_1) = \frac{3}{5}, P(\xi = 3) = P(B_2) = \frac{2}{5} \therefore E\xi = 2 \times \frac{3}{5} + 3 \times \frac{2}{5} = \frac{12}{5} = 2.4 \text{ (次)}$$

5.(2008.II.6) 从 20 名男同学, 10 名女同学中任选 3 名参加体能测试, 则选到的 3 名同学中既有男同学又有女同学的概率为 ( )

- A.  $\frac{9}{29}$                       B.  $\frac{10}{29}$                       C.  $\frac{19}{29}$                       D.  $\frac{20}{29}$

分析: D

$$\text{【解析】 } P = \frac{C_{20}^1 C_{10}^2 + C_{20}^2 C_{10}^1}{C_{30}^3} = \frac{20}{29}$$

6.(2008.II.18) 购买某种保险, 每个投保人每年度向保险公司交纳保费  $a$  元, 若投保人在购买保险的一年度内出险, 则可以获得 10 000 元的赔偿金. 假定在一年度内有 10 000 人购买了这种保险, 且各投保人是否出险相互独立. 已知保险公司在一年度内至少支付赔偿金 10 000 元的概率为  $1 - 0.999^{10^4}$ .

(I) 求一投保人在一年度内出险的概率  $p$ ;

(II) 设保险公司开办该项险种业务除赔偿金外的成本为 50 000 元, 为保证盈利的期望不小于 0, 求每位投保人应交纳的最低保费 (单位: 元).

分析: 各投保人是否出险互相独立, 且出险的概率都是  $p$ , 记投保的 10 000 人中出险的人数为  $\xi$ , 则  $\xi \sim B(10^4, p)$ .

(I) 记  $A$  表示事件: 保险公司为该险种至少支付 10 000 元赔偿金, 则  $\bar{A}$  发生当且仅当  $\xi = 0$ , .....2 分

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(\xi = 0) = 1 - (1 - p)^{10^4},$$

又  $P(A) = 1 - 0.999^{10^4}$ , 故  $p = 0.001$ . .....5 分

(II) 该险种总收入为  $10\,000a$  元, 支出是赔偿金总额与成本的和.

支出  $10\,000 + 50$ , 盈利  $\eta = 10\,000a - (10\,000 + 50)$

盈利的期望为  $E\eta = 10000a - 10000 \times 5$ , .....9 分

由  $\xi \sim B(10^4, 10^{-3})$  知,  $E\xi = 10000 \times 10^{-3}$ ,

$$E\eta = 10^4 a - 10^4 E\xi - 5 \times 10^4 = 10^4 a - 10^4 \times 10^4 \times 10^{-3} - 5 \times 10^4.$$

$$E\eta \geq 0 \Leftrightarrow 10^4 a - 10^4 \times 10 - 5 \times 10^4 \geq 0 \Leftrightarrow a - 10 - 5 \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 15 \text{ (元)}.$$

故每位投保人应交纳的最低保费为 15 元. ....12 分

7.(2009.I.19) 甲、乙二人进行一次围棋比赛, 约定先胜 3 局者获得这次比赛的胜利, 比赛结束, 假设在一局中, 甲获胜的概率为 0.6, 乙获胜的概率为 0.4, 各局比赛结果相互独立, 已知前 2 局中, 甲、乙各胜 1 局。

(I) 求甲获得这次比赛胜利的概率;

(II) 设  $\xi$  表示从第 3 局开始到比赛结束所进行的局数, 求  $\xi$  得分布列及数学期望。

分析: 本题较常规, 比 08 年的概率统计题要容易。

需提醒的是: 认真审题是前提, 部分考生由于考虑了前两局的概率而导致失分, 这是很可惜的, 主要原因在于没读懂题。

另外, 还要注意表述, 这也是考生较薄弱的环节。

8.(2009.II.20) 某车间甲组有 10 名工人, 其中有 4 名女工人; 乙组有 5 名工人, 其中有 3 名女工人, 现采用分层抽样方法 (层内采用不放回简单随机抽样) 从甲、乙两组中共抽取 3 名工人进行技术考核。

(I) 求从甲、乙两组各抽取的人数;

(II) 求从甲组抽取的工人中恰有 1 名女工人的概率;

(III) 记  $\xi$  表示抽取的 3 名工人中男工人数, 求  $\xi$  的分布列及数学期望。

分析: (I) 这一问较简单, 关键是把握题意, 理解分层抽样的原理即可。另外要注意此分层抽样与性别无关。

(II) 在第一问的基础上, 这一问处理起来也并不困难。

$$\text{从甲组抽取的工人中恰有 1 名女工人的概率 } P = \frac{C_4^1 \cdot C_6^1}{C_{10}^2} = \frac{8}{15}$$

(III)  $\xi$  的可能取值为 0, 1, 2, 3

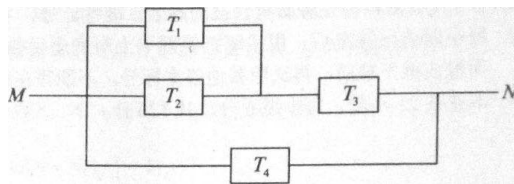
$$P(\xi=0) = \frac{C_4^2 \cdot C_3^1}{C_{10}^2 \cdot C_5^1} = \frac{6}{75}, \quad P(\xi=1) = \frac{C_4^1 C_6^1}{C_{10}^2 \cdot C_5^1} + \frac{C_4^2 \cdot C_2^1}{C_{10}^2 \cdot C_5^1} = \frac{28}{75},$$

$$P(\xi=3)=\frac{C_6^2}{C_{10}^2}\cdot\frac{C_2^1}{C_5^1}=\frac{10}{75}, \quad P(\xi=2)=1-P(\xi=0)-P(\xi=1)-P(\xi=3)=\frac{31}{75}$$

分布列及期望略。

评析：本题较常规，比 08 年的概率统计题要容易。在计算  $P(\xi=2)$  时，采用分类的方法，用直接法也可，但较繁琐，考生应增强灵活变通的能力。

9.(2010.I.20) 如图，由  $M$  到  $N$  的电路中有 4 个元件，分别标为  $T_1, T_2, T_3, T_4$ ，电流能通过  $T_1, T_2, T_3$  的概率都是  $p$ ，电流能通过  $T_4$  的概率是 0.9。电流能否通过各元件相互独立。已知  $T_1, T_2, T_3$  中至少有一个能通过电流的概率为 0.999。



(I) 求  $p$ ;

(II) 求电流能在  $M$  与  $N$  之间通过的概率;

(III)  $\xi$  表示  $T_1, T_2, T_3, T_4$  中能通过电流的元件个数，求  $\xi$  的期望。

分析：【命题意图】本试题主要考查独立事件的概率、对立事件的概率、互斥事件的概率及数学期望，考查分类讨论的思想方法及考生分析问题、解决问题的能力。

【参考答案】

记  $A_i$  表示事件：电流能通过  $T_i, i=1, 2, 3, 4$ ,

$A$  表示事件： $T_1, T_2, T_3$  中至少有一个能通过电流，

$B$  表示事件：电流能在  $M$  与  $N$  之间通过。

(I)  $\bar{A} = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3$ ,  $A_1, A_2, A_3$  相互独立，

$$P(\bar{A}) = P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) = (1-p)^3,$$

$$\text{又 } P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.999 = 0.001,$$

$$\text{故 } (1-p)^3 = 0.001, \quad p = 0.9. \quad \dots$$

(II)  $B = A_4 + \bar{A}_4 \cdot A_1 \cdot A_3 + \bar{A}_4 \cdot \bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3$ ,

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_4 + \bar{A}_4 \cdot A_1 \cdot A_3 + \bar{A}_4 \cdot \bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3) \\ &= P(A_4) + P(\bar{A}_4 \cdot A_1 \cdot A_3) + P(\bar{A}_4 \cdot \bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3) \\ &= P(A_4) + P(\bar{A}_4)P(A_1)P(A_3) + P(\bar{A}_4)P(\bar{A}_1)P(A_2)P(A_3) \\ &= 0.9 + 0.1 \times 0.9 \times 0.9 + 0.1 \times 0.1 \times 0.9 \times 0.9 \\ &= 0.9891. \quad \dots \end{aligned}$$

(III) 由于电流能通过各元件的概率都是 0.9，且电流能否通过各元件相互独立，

故  $\xi \sim B(4, 0.9)$ ,

$$E\xi = 4 \times 0.9 = 3.6. \quad \dots$$

【点评】概率与统计也是每年的必考题，但对考试难度有逐年加强的趋势，已经由原来解答题的前 3 题的位置逐渐后移到第 20 题的位置，对考生分析问题的能力要求有所加强，这应引起高度重视。

10.(2011.I.4) 有 3 个兴趣小组，甲、乙两位同学各自参加其中一个小组，每位同学参加各个小组的可能性相同，则这两位同学参加同一个兴趣小组的概率为 ( )

- A.  $\frac{1}{3}$                       B.  $\frac{1}{2}$                       C.  $\frac{2}{3}$                       D.  $\frac{3}{4}$

分析：每个同学参加的情形都有 3 种，故两个同学参加一组的情形有 9 种，而参加同一组的情形只有 3 种，所求的概率为  $p = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$  选 A。

11.(2011.I.19) 某种产品的质量以其质量指标值衡量，质量指标值越大表明质量越好，且质量指标值大于或等于 102 的产品为优质品，现用两种新配方（分别称为 A 配方和 B 配方）做试验，各生产了 100 件这种产品，并测量了每件产品的质量指标值，得到下面试验结果：

A 配方的频数分布表

| 指标值分组 | [90, 94) | [94, 98) | [98, 102) | [102, 106) | [106, 110] |
|-------|----------|----------|-----------|------------|------------|
| 频数    | 8        | 20       | 42        | 22         | 8          |

B 配方的频数分布表

| 指标值分组 | [90, 94) | [94, 98) | [98, 102) | [102, 106) | [106, 110] |
|-------|----------|----------|-----------|------------|------------|
| 频数    | 4        | 12       | 42        | 32         | 10         |

(I) 分别估计用 A 配方，B 配方生产的产品的优质品率；

(II) 已知用 B 配方生成的一件产品的利润  $y$  (单位：元) 与其质量指标值  $t$  的关系式为

$$y = \begin{cases} -2, & t < 94, \\ 2, & 94 \leq t < 102, \\ 4, & t \geq 102. \end{cases}$$

从用 B 配方生产的产品中任取一件，其利润记为  $X$  (单位：元)，求  $X$  的分布列及数学期望。

(以试验结果中质量指标值落入各组的频率作为一件产品的质量指标值落入相应组的概率)

分析：(I) 由试验结果知，用 A 配方生产的产品中优质的平率为  $\frac{22+8}{100} = 0.3$ ，所以用 A 配方生产的产品优质品率的估计值为 0.3。由试验结果知，用 B 配方生产的产品中优质品的频率为  $\frac{32+10}{100} = 0.42$ ，所以用 B 配方生产的产品优质品率的估计值为 0.42

(II) 用 B 配方生产的 100 件产品中，其质量指标值落入区间  $[90, 94)$ ,  $[94, 102)$ ,  $[102, 110]$  的频率分别为 0.04, 0.12, 0.42，因此  $X$  的可能值为 -2, 2, 4.  $P(X=-2)=0.04$ ,  $P(X=2)=0.54$ ,  $P(X=4)=0.42$ ,

|     |    |   |   |
|-----|----|---|---|
| $X$ | -2 | 2 | 4 |
|-----|----|---|---|

即  $X$  的分布列为

|   |      |      |      |
|---|------|------|------|
| P | 0.04 | 0.54 | 0.42 |
|---|------|------|------|

$X$  的数学期望值

$$EX = -2 \times 0.04 + 2 \times 0.54 + 4 \times 0.42 = 2.68$$

12.(2011.II.18) 根据以往统计资料, 某地车主购买甲种保险的概率为 0.5, 购买乙种保险但不购买甲种保险的概率为 0.3, 设各车主购买保险相互独立.

(I) 求该地 1 位车主至少购买甲、乙两种保险中的 1 种的概率;

(II)  $X$  表示该地的 100 位车主中, 甲、乙两种保险都不购买的车主数. 求  $X$  的期望.

分析: 【命题意图】本题主要考查独立事件的概率、对立事件的概率、互斥事件的概率及二项分布的数学期望, 考查考生分析问题、解决问题的能力.

【解析】记  $A$  表示事件: 该地的 1 位车主购买甲种保险;

$B$  表示事件: 该地的 1 位车主购买乙种保险但不购买甲种保险;

$C$  表示事件: 该地的 1 位车主至少购买甲、乙两种保险中的 1 种;

$D$  表示事件: 该地的 1 位车主甲、乙两种保险都不购买.

$$(I) P(A) = 0.5, P(B) = 0.3, C = A + B \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$P(C) = P(A + B) = P(A) + P(B) = 0.8 \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

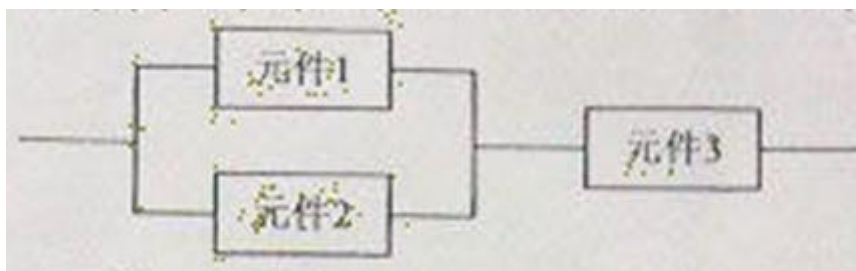
$$(II) D = \bar{C}, P(D) = 1 - P(C) = 1 - 0.8 = 0.2$$

$$X \sim B(100, 0.2), \text{即 } X \text{ 服从二项分布}, \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{所以期望 } EX = 100 \times 0.2 = 20 \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

【点评】概率与统计是每年的必考题, 一般安排在解答题的前 3 题. 本题属于已知概率求概率类型. 考查保险背景下的概率问题, 要求考生熟练掌握独立事件的概率、对立事件的概率、互斥事件的概率及二项分布的数学期望.

13.(2012.I.15) 某个部件由三个元件按下图方式连接而成, 元件 1 或元件 2 正常工作, 且元件 3 正常工作, 则部件正常工作, 设三个电子元件的使用寿命 (单位: 小时) 均服从正态分布  $N(1000, 50^2)$ , 且各个元件能否正常相互独立, 那么该部件的使用寿命超过 1000 小时的概率为\_\_\_\_\_.



分析：使用寿命超过 1000 小时的概率为  $\frac{3}{8}$

三个电子元件的使用寿命均服从正态分布  $N(1000, 50^2)$

得：三个电子元件的使用寿命超过 1000 小时的概率为  $p = \frac{1}{2}$

超过 1000 小时时元件 1 或元件 2 正常工作的概率  $P_1 = 1 - (1 - p)^2 = \frac{3}{4}$

那么该部件的使用寿命超过 1000 小时的概率为  $p_2 = p_1 \times p = \frac{3}{8}$

14.(2012.I.18) 某花店每天以每枝 5 元的价格从农场购进若干枝玫瑰花，然后以每枝 10 元的价格出售，如果当天卖不完，剩下的玫瑰花作垃圾处理。

(1) 若花店一天购进 16 枝玫瑰花，求当天的利润  $y$  (单位：元) 关于当天需求量  $n$

(单位：枝， $n \in N$ ) 的函数解析式。

(2) 花店记录了 100 天玫瑰花的日需求量 (单位：枝)，整理得下表：

|          |    |    |    |    |    |    |    |
|----------|----|----|----|----|----|----|----|
| 日需求量 $n$ | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 频 数      | 10 | 20 | 16 | 16 | 15 | 13 | 10 |

以 100 天记录的各需求量的频率作为各需求量发生的概率。

(i) 若花店一天购进 16 枝玫瑰花， $X$  表示当天的利润 (单位：元)，求  $X$  的分布列，数学期望及方差；

(ii) 若花店计划一天购进 16 枝或 17 枝玫瑰花，你认为应购进 16 枝还是 17 枝？

请说明理由。

分析：(1) 当  $n \geq 16$  时， $y = 16 \times (10 - 5) = 80$ ；当  $n \leq 15$  时， $y = 5n - 5(16 - n) = 10n - 80$

得：  $y = \begin{cases} 10n - 80 & (n \leq 15) \\ 80 & (n \geq 16) \end{cases} (n \in N)$

(2) (i)  $X$  可取 60, 70, 80

$P(X = 60) = 0.1, X \neq 70 \Rightarrow P(X = 70) = 0.2$  ( =

$X$  的分布列为

|     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|
| $X$ | 60  | 70  | 80  |
| $P$ | 0.1 | 0.2 | 0.7 |

$EX = 60 \times 0.1 + 70 \times 0.2 + 80 \times 0.7 = 76$ ,  $DX = 16^2 \times 0.1 + 6^2 \times 0.2 + 4^2 \times 0.7 = 44$

(ii) 购进 17 枝时, 当天的利润为

$$y = (14 \times 5 - 3 \times 5) \times 0.1 + (15 \times 5 - 2 \times 5) \times 0.2 + (16 \times 5 - 1 \times 5) \times 0.16 + 17 \times 5 \times 0.54 = 76.4$$

76.4 得: 应购进 17 枝

15.(2012.II.19) 乒乓球比赛规则规定: 一局比赛, 双方比分在 10 平前, 一方连续发球 2 次后, 对方再连续发球 2 次, 依次轮换, 每次发球, 胜方得 1 分, 负方得 0 分。设在甲、乙的比赛中, 每次发球, 发球方得 1 分的概率为 0.6, 各次发球的胜负结果相互独立, 。甲、乙的一局比赛中, 甲先发球。

(1) 求开始第 4 次发球时, 甲、乙的比分为 1 比 2 的概率;

(2)  $\xi$  表示开始第 4 次发球时乙的得分, 求  $\xi$  的期望。

分析: 【命题意图】本试题主要是考查了独立事件的概率的求解, 以及分布列和期望值的问题。首先要理解发球的具体情况, 然后对于事件的情况分析、讨论, 并结合独立事件的概率求解结论。

解: 记  $A_i$  为事件“第  $i$  次发球, 甲胜”,  $i=1,2,3$ , 则  $P(A_1)=0.6, P(A_2)=0.6, P(A_3)=0.4$ 。

(I) 事件“开始第 4 次发球时, 甲、乙的比分为 1 比 2”为  $A_1 \overline{A_2} \overline{A_3} + \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} + \overline{A_1} \overline{A_2} A_3$ , 由互斥事件有一个发生的概率加法公式得

$$P(A_1 \overline{A_2} \overline{A_3} + \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} + \overline{A_1} \overline{A_2} A_3) = 0.6 \times 0.4 \times 0.6 + 0.4 \times 0.6 \times 0.6 + 0.4 \times 0.4 \times 0.4 = 0.352。$$

即开始第 4 次发球时, 甲、乙的比分为 1 比 2 的概率为 0.352。

(II) 由题意  $\xi = 0, 1, 2, 3$ 。  $P(\xi = 0) = P(A_1 A_2 A_3) = 0.6 \times 0.6 \times 0.4 = 0.144$ ;

$$P(\xi = 1) = P(\overline{A_1} A_2 A_3 + A_1 \overline{A_2} A_3 + A_1 A_2 \overline{A_3}) = 0.4 \times 0.6 \times 0.4 + 0.6 \times 0.4 \times 0.4 + 0.6 \times 0.6 \times 0.6 = 0.408;$$

$$P(\xi = 2) = 0.352; \quad P(\xi = 3) = P(\overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3}) = 0.4 \times 0.4 \times 0.6 = 0.096$$

所以  $E\xi = 0.408 + 2 \times 0.352 + 3 \times 0.096 = 1.4$

【点评】首先从试题的选材上来源于生活, 同学们比较熟悉的背景, 同时建立在该基础上求解进行分类讨论的思想的运用, 以及能结合独立事件的概率公式求解分布列的问题。情景比较亲切, 容易入手, 但是在讨论情况的时候, 容易丢情况。

16.(2012.I.3) 为了解某地区的中小学生视力情况, 拟从该地区的中小学生中抽取部分学生进行调查, 事先已了解到该地区小学、初中、高中三个学段学生的视力情况有较大差异, 而男女生视力情况差异不大, 在下面的抽样方法中, 最合理的抽样方法是 ( )

A. 简单随机抽样      B. 按性别分层抽样      C. 按学段分层抽样      D. 系统抽样

分析: C.

17.(2013.I.19) 一批产品需要进行质量检验, 检验方案是: 先从这批产品中任取 4 件作检验, 这 4 件产品中优质品的件数记为  $n$ 。如果  $n=3$ , 再从这批产品中任取 4 件作检验, 若都为优

质品，则这批产品通过检验；如果  $n=4$ ，再从这批产品中任取 1 件作检验，若为优质品，则这批产品通过检验；其他情况下，这批产品都不能通过检验。

假设这批产品的优质品率为 50%，即取出的产品是优质品的概率都为  $\frac{1}{2}$ ，且各件产品是否为优质品相互独立。

(1) 求这批产品通过检验的概率；

(2) 已知每件产品检验费用为 100 元，凡抽取的每件产品都需要检验，对这批产品作质量检验所需的费用记为  $X$  (单位：元)，求  $X$  的分布列及数学期望。

分析：设第一次取出的 4 件产品中恰有 3 件优质品为事件  $A$ ，第一次取出的 4 件产品全为优质品为事件  $B$ ，第二次取出的 4 件产品都是优质品为事件  $C$ ，第二次取出的 1 件产品是优质品为事件  $D$ ，这批产品通过检验为事件  $E$ ，根据题意有  $E=(AB) \cup (CD)$ ，且  $AB$  与  $CD$  互斥，

$$\therefore P(E)=P(AB)+P(CD)=P(A)P(B|A)+P(C)P(D|C)=C_4^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{64} \dots\dots 6 \text{ 分}$$

(II)  $X$  的可能取值为 400,500,800，并且

$$P(X=400)=1-C_4^3\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{11}{16}, \quad P(X=500)=\frac{1}{16}, \quad P(X=800)=C_4^3\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \frac{1}{2}=\frac{1}{4},$$

$\therefore X$  的分布列为

|     |                 |                |               |
|-----|-----------------|----------------|---------------|
| $X$ | 400             | 500            | 800           |
| $P$ | $\frac{11}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{4}$ |

.....10 分

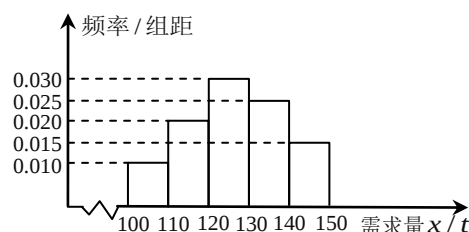
$$EX=400 \times \frac{11}{16} + 500 \times \frac{1}{16} + 800 \times \frac{1}{4} = 506.25$$

.....12 分

18.(2013.II.14) 从  $n$  个正整数  $1, 2, \dots, n$  中任意取出两个不同的数，若取出的两数之和等于 5 的概率为  $\frac{1}{14}$ ，则  $n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

分析：8.

19.(2013.II.19) 经销商经销某种农产品，在一个销售季度内，每售出 1t 该产品获利润 500 元，未售出的产品，每 1t 亏损 300 元。根据历史资料，得到销售季度内市场需求量的频率分布直方图，如图所示。经销商为下一个销售季度购进了 130t 该农产品，以  $X$  (单位：t,  $100 \leq X \leq 150$ ) 表示下一个销售季度内的市场需求量， $T$  (单位：元) 表示下一个销售季度内销商该农产品的利润。



(I) 将  $T$  表示为  $X$  的函数；

(II) 根据直方图估计利润  $T$  不少于 57000 元的概率；

(III) 在直方图的需求量分组中，以各组的区间中点值代表该组的各个值，需求量落入该区间的频率作为需求量取该区间中点值的概率(例如：若  $X \in [100, 110)$ ，则取  $X = 105$ ，且  $X = 105$  的概率等于需求量落入  $[100, 110)$  的概率)，求利润  $T$  的数学期望。

分析：

(I) 当  $X \in [100, 130)$  时,  

$$T = 500X - 300(130 - X)$$

$$= 800X - 39\,000.$$

当  $X \in [130, 150]$  时,  

$$T = 500 \times 130 = 65\,000.$$

所以 
$$T = \begin{cases} 800X - 39\,000, & 100 \leq X < 130, \\ 65\,000, & 130 \leq X \leq 150. \end{cases}$$

(II) 由 (I) 知利润  $T$  不少于 57 000 元当且仅当  
 $120 \leq X \leq 150.$

由直方图知需求量  $X \in [120, 150]$  的频率为 0.7. 所以下一个销售季度内的利润  $T$  不少于 57 000 元的概率的估计值为 0.7.

(III) 依题意可得  $T$  的分布列为

|     |        |        |        |        |
|-----|--------|--------|--------|--------|
| $T$ | 45 000 | 53 000 | 61 000 | 65 000 |
| $P$ | 0.1    | 0.2    | 0.3    | 0.4    |

所以 
$$ET = 45\,000 \times 0.1 + 53\,000 \times 0.2 + 61\,000 \times 0.3 + 65\,000 \times 0.4$$

$$= 59\,400.$$

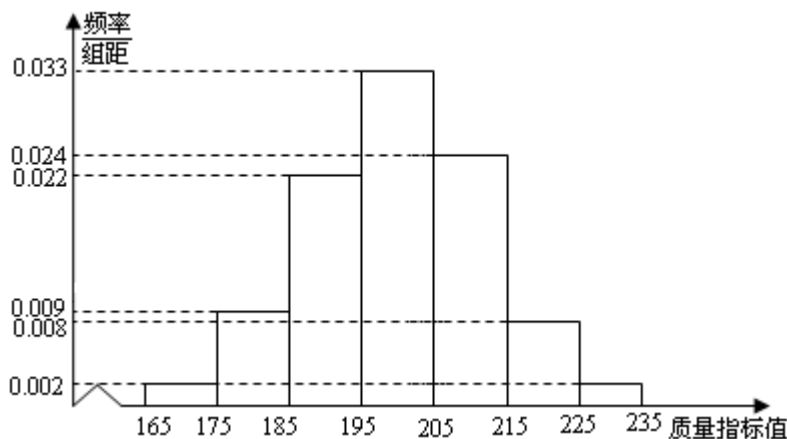
20.(2014.I.18) 从某企业的某种产品中抽取 500 件, 测量这些产品的一项质量指标值, 由测量结果得如下频率分布直方图:

(I) 求这 500 件产品质量指标值的

样本平均数  $\bar{x}$  和样本方差  $s^2$

(同一组数据用该区间的中点值作代表);

(II) 由频率分布直方图可以认为, 这种产品的质量指标值  $Z$  服



从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ , 其中  $\mu$  近似为样本平均数  $\bar{x}$ ,  $\sigma^2$  近似为样本方差  $s^2$ .

(i) 利用该正态分布, 求  $P(187.8 < Z < 212.2)$ ;

(ii) 某用户从该企业购买了 100 件这种产品, 学科网记  $X$  表示这 100 件产品中质量指标值为于区间  $(187.8, 212.2)$  的产品件数, 利用 (i) 的结果, 求  $EX$ .

附:  $\sqrt{150} \approx 12.2$ . 若  $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 则  $P(\mu - \sigma < Z < \mu + \sigma) = 0.6826$ ,

$$P(\mu - 2\sigma < Z < \mu + 2\sigma) = 0.9544.$$

分析: (I) 抽取产品的质量指标值的样本平均数  $\bar{x}$  和样本方差  $s^2$  分别为

$$\bar{x} = 170 \times 0.02 + 180 \times 0.09 + 190 \times 0.22 + 200 \times 0.33 + 210 \times 0.24 + 220 \times 0.08 + 230 \times 0.02 = 200$$

$$s^2 = (-30)^2 \times 0.02 + (-20)^2 \times 0.09 + (-10)^2 \times 0.22$$

$$+0 \times 0.33 - 210 \times 0.24 - 20 - 0.208 \times 30 = \dots\dots 6 \text{ 分}$$

(II) (i) 由 (I) 知,  $Z \sim N(200, 150)$ , 从而

$$P(187.8 < Z < 212.2) = P(200 - 12.2 < Z < 200 + 12.2) = 0.6826. \dots\dots 9 \text{ 分}$$

(ii) 由 (i) 知, 一件产品的质量指标值位于区间  $(187.8, 212.2)$  的概率为 0.6826, 依题意知  $X \sim B(100, 0.6826)$ , 所以  $EX = 100 \times 0.6826 = 68.26$ .  $\dots\dots 12 \text{ 分}$

21.(2014.II.5) 某地区空气质量监测资料表明, 一天的空气质量为优良的概率是 0.75, 连续两为优良的概率是 0.6, 已知某天的空气质量为优良, 则随后一天的空气质量为优良的概率是 ( )

- A. 0.8                      B. 0.75                      C. 0.6                      D. 0.45

分析: A.

22.(2014.II.19) 某地区 2007 年至 2013 年农村居民家庭纯收入  $y$  (单位: 千元) 的数据如下表:

|           |      |      |      |      |      |      |      |
|-----------|------|------|------|------|------|------|------|
| 年份        | 2007 | 2008 | 2009 | 2010 | 2011 | 2012 | 2013 |
| 年份代号 $t$  | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    |
| 人均纯收入 $y$ | 2.9  | 3.3  | 3.6  | 4.4  | 4.8  | 5.2  | 5.9  |

(I) 求  $y$  关于  $t$  的线性回归方程;

(II) 利用 (I) 中的回归方程, 分析 2007 年至 2013 年该地区农村居民家庭人均纯收入的变化情况, 并预测该地区 2015 年农村居民家庭人均纯收入.

附: 回归直线的斜率和截距的最小二乘法估计公式分别为:  $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2}$ ,  $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{t}$

分析: (I) 由所给数据计算得  $\bar{t} = \frac{1}{7} (1+2+3+4+5+6+7) = 4$

$$\bar{y} = \frac{1}{7} (2.9+3.3+3.6+4.4+4.8+5.2+5.9) = 4.3, \quad \sum_{t=1}^7 (t_1 - \bar{t})^2 = 9+4+1+0+1+4+9=28$$

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^7 (t_1 - \bar{t})(y_1 - \bar{y}) &= (-3) \times (-1.4) + (-2) \times (-1) + (-1) \times (-0.7) + 0 \times 0.1 + 1 \times 0.5 \\ &\quad + 2 \times 0.9 + 3 \times 1.6 \\ &= 14. \end{aligned}$$

$$\hat{b} = \frac{\sum_{t=1}^7 (t_1 - \bar{t})(y_1 - \bar{y})}{\sum_{t=1}^7 (t_1 - \bar{t})^2} = \frac{14}{28} = 0.5, \quad a = \bar{y} - \hat{b}\bar{t} = 4.3 - 0.5 \times 4 = 2.3.$$

所求回归方程为  $y = 0.5t + 2.3$ .

(II) 由(I)知,  $b=0.5 > 0$ , 故 2007 年至 2013 年该地区农村居民家庭人均纯收入逐年增加, 平均每年增加 0.5 千元。

将 2015 年的年份代号  $t=9$  带入 (I) 中的回归方程, 得  $y=0.5 \times 9 + 2.3 = 6.8$

故预测该地区 2015 年农村居民家庭人均纯收入为 6.8 千元。

22.(2015.I.4) 投篮测试中, 每人投 3 次, 至少投中 2 次才能通过测试。已知某同学每次投篮投中的概率为 0.6, 且各次投篮是否投中相互独立, 则该同学通过测试的概率为( )

A. 0.648

B. 0.432

C. 0.36

D. 0.312

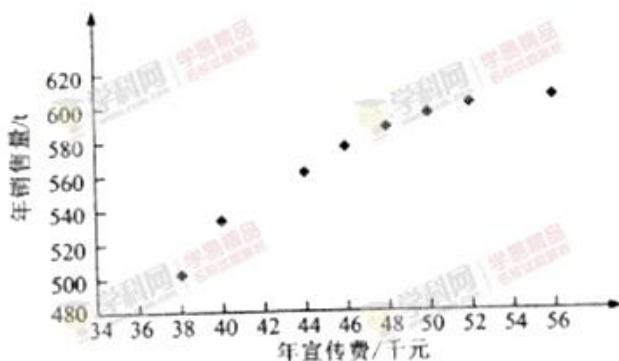
【答案】A

学科网【解析】根据独立重复试验公式得, 该同学通过测试的概率为  $C_3^2 \cdot 0.6^2 \times 0.4 + 0.6^3 = 0.648$ , 故选 A.

【考点定位】本题主要考查独立重复试验的概率公式与互斥事件和概率公式

【名师点睛】解答本题时, 先想到所求事件是恰好中 3 次与恰好中 2 次两个互斥事件的和, 而这两个事件又是实验 3 次恰好分别发生 3 次和 2 次的独立重复试验, 本题很好考查了学生对独立重复试验和互斥事件的理解和公式的记忆与灵活运用, 是基础题, 正确分析概率类型、灵活运用概率公式是解本题的关键。

23.(2015.I.19) 某公司为确定下一年度投入某种产品的宣传费, 需了解年宣传费  $x$  (单位: 千元) 对年销售量  $y$  (单位:  $t$ ) 和年利润  $z$  (单位: 千元) 的影响, 对近 8 年的年宣传费  $x_i$  和年销售量  $y_i$  ( $i=1, 2, \dots, 8$ ) 数据作了初步处理, 得到下面的散点图及一些统计量的值。



| $\bar{x}$ | $\bar{y}$ | $\bar{w}$ | $\sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})^2$ | $\sum_{i=1}^8 (w_i - \bar{w})^2$ | $\sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ | $\sum_{i=1}^8 (w_i - \bar{w})(y_i - \bar{y})$ |
|-----------|-----------|-----------|----------------------------------|----------------------------------|-----------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| 46.6      | 56.3      | 6.8       | 289.8                            | 1.6                              | 1469                                          | 108.8                                         |

表中  $w_i = \sqrt{x_i}$ ,  $\bar{w} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 w_i$

(I) 根据散点图判断,  $y=a+bx$  与  $y=c+d\sqrt{x}$  哪一个适宜作为年销售量  $y$  关于年宣传费  $x$  的回归方程类型? (给出判断即可, 不必说明理由)

(II) 根据 (I) 的判断结果及表中数据, 建立  $y$  关于  $x$  的回归方程;

(III) 已知这种产品的年利率  $z$  与  $x$ 、 $y$  的关系为  $z=0.2y-x$ . 根据 (II) 的结果回答下列问题:

(i) 年宣传费  $x=49$  时, 年销售量及年利润的预报值是多少?

(ii) 年宣传费  $x$  为何值时, 年利率的预报值最大?

附: 对于一组数据  $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_n, v_n)$ , 其回归线  $v = \alpha + \beta u$  的斜率和截距的最小二

乘估计分别为:  $\beta = \frac{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})}{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2}$ ,  $\alpha = \bar{v} - \beta \bar{u}$

【答案】(I)  $y=c+d\sqrt{x}$  适合作为年销售  $y$  关于年宣传费用  $x$  的回归方程类型；(II)  $y=100.6+68\sqrt{x}$  (III) 46.24

【解析】

试题分析：(I) 由散点图及所给函数图像即可选出适合作为拟合的函数；(II) 令  $w=\sqrt{x}$ ，先求出建立  $y$  关于  $w$  的线性回归方程，即可  $y$  关于  $x$  的回归方程；(III) (i) 利用  $y$  关于  $x$  的回归方程先求出年销售量  $y$  的预报值，再根据年利率  $z$  与  $x$ 、 $y$  的关系为  $z=0.2y-x$  即可年利润  $z$  的预报值；(ii) 根据 (II) 的结果知，年利润  $z$  的预报值，列出关于  $x$  的方程，利用二次函数求最值的方法即可求出年利润取最大值时的年宣传费用。

试题解析：(I) 由散点图可以判断， $y=c+d\sqrt{x}$  适合作为年销售  $y$  关于年宣传费用  $x$  的回归方程类型. ……2 分

$$(II) \text{ 令 } w=\sqrt{x}, \text{ 先建立 } y \text{ 关于 } w \text{ 的线性回归方程, 由于 } \hat{d} = \frac{\sum_{i=1}^8 (w_i - \bar{w})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^8 (w_i - \bar{w})^2} = \frac{108.8}{16} = 6.8,$$

$$\therefore \hat{c} = \bar{y} - \hat{d}\bar{w} = 563 - 6.8 \times 6.8 = 100.6.$$

$$\therefore y \text{ 关于 } w \text{ 的线性回归方程为 } \hat{y} = 100.6 + 6.8w,$$

$$\therefore y \text{ 关于 } x \text{ 的回归方程为 } \hat{y} = 100.6 + 68\sqrt{x}. \text{……6 分}$$

(III) (i) 由 (II) 知，当  $x=49$  时，年销售量  $y$  的预报值

$$\hat{y} = 100.6 + 68\sqrt{49} = 576.6,$$

$$\hat{z} = 576.6 \times 0.2 - 49 = 66.32. \text{……9 分}$$

(ii) 根据 (II) 的结果知，年利润  $z$  的预报值

$$\hat{z} = 0.2(100.6 + 68\sqrt{x}) - x = -x + 13.6\sqrt{x} + 20.12,$$

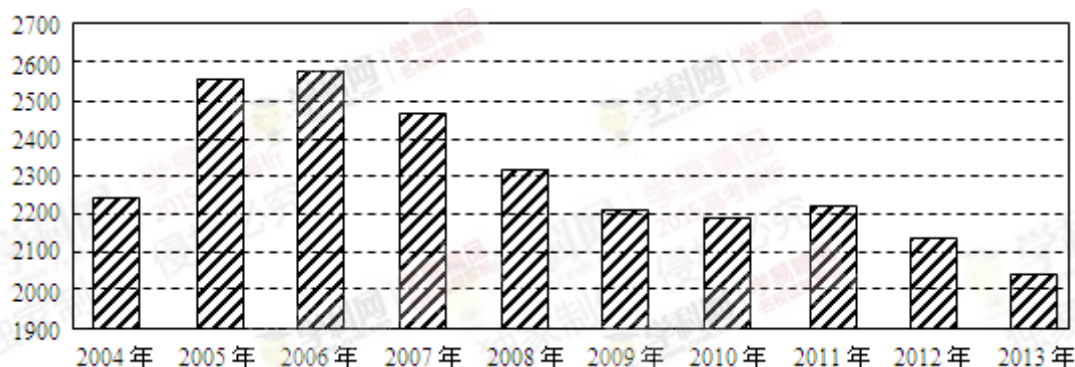
$$\therefore \text{当 } \sqrt{x} = \frac{13.6}{2} = 6.8, \text{ 即 } x = 46.24 \text{ 时, } \hat{z} \text{ 取得最大值.}$$

故宣传费用为 46.24 千元时，年利润的预报值最大. ……12 分

【考点定位】非线性拟合；线性回归方程求法；利用回归方程进行预报预测；应用意识

【名师点睛】本题考查了非线性拟合及非线性回归方程的求解与应用，是源于课本的试题类型，解答非线性拟合问题，先作出散点图，再根据散点图选择合适的函数类型，设出回归方程，利用换元法将非线性回归方程化为线性回归方程，求出样本数据换元后的值，然后根据线性回归方程的计算方法计算变换后的线性回归方程系数，即可求出非线性回归方程，再利用回归方程进行预报预测，注意计算要细心，避免计算错误。

24.(2015.II.3) 根据下面给出的 2004 年至 2013 年我国二氧化硫排放量（单位：万吨）柱形图。以下结论不正确的是 ( )



- A. 逐年比较, 2008 年减少二氧化硫排放量的效果最显著  
 B. 2007 年我国治理二氧化硫排放显现  
 C. 2006 年以来我国二氧化硫年排放量呈减少趋势  
 D. 2006 年以来我国二氧化硫年排放量与年份正相关

【答案】D

【解析】由柱形图得, 从 2006 年以来, 我国二氧化硫排放量呈下降趋势, 故年排放量与年份负相关, 故选 D.

【考点定位】正、负相关.

【名师点睛】本题以实际背景考查回归分析中的正、负相关, 利用增长趋势或下降趋势理解正负相关的概念是解题关键, 属于基础题.

25.(2015.II.18) 某公司为了了解用户对其产品的满意度, 从 A, B 两地区分别随机调查了 20 个用户, 得到用户对产品的满意度评分如下:

A 地区: 62 73 81 92 95 85 74 64 53 76  
 78 86 95 66 97 78 88 82 76 89  
 B 地区: 73 83 62 51 91 46 53 73 64 82  
 93 48 65 81 74 56 54 76 65 79

(I) 根据两组数据完成两地区用户满意度评分的茎叶图, 并通过茎叶图比较两地区满意度评分的平均值及分散程度 (不要求计算出具体值, 得出结论即可);



(II) 根据用户满意度评分, 将用户的满意度从低到高分三个等级:

|       |         |            |          |
|-------|---------|------------|----------|
| 满意度评分 | 低于 70 分 | 70 分到 89 分 | 不低于 90 分 |
| 满意度等级 | 不满意     | 满意         | 非常满意     |

记事件  $C$ ：“A 地区用户的满意度等级高于 B 地区用户的满意度等级”。假设两地区用户的评价结果相互独立。根据所给数据，以事件发生的频率作为相应事件发生的概率，求  $C$  的概率。

【答案】（I）详见解析；（II）0.48.

【解析】（I）两地区用户满意度评分的茎叶图如下



通过茎叶图可以看出，A 地区用户满意度评分的平均值高于 B 地区用户满意度评分的平均值；A 地区用户满意度评分比较集中，B 地区用户满意度评分比较分散。

（II）记  $C_{A1}$  表示事件：“A 地区用户满意度等级为满意或非常满意”；

$C_{A2}$  表示事件：“A 地区用户满意度等级为非常满意”；

$C_{B1}$  表示事件：“B 地区用户满意度等级为不满意”；

$C_{B2}$  表示事件：“B 地区用户满意度等级为满意”。

则  $C_{A1}$  与  $C_{B1}$  独立， $C_{A2}$  与  $C_{B2}$  独立， $C_{B1}$  与  $C_{B2}$  互斥， $C = C_{B1}C_{A1} \cup C_{B2}C_{A2}$ 。

$$P(C) = P(C_{B1}C_{A1} \cup C_{B2}C_{A2}) = P(C_{B1}C_{A1}) + P(C_{B2}C_{A2}) = P(C_{B1})P(C_{A1}) + P(C_{B2})P(C_{A2}).$$

由所给数据得  $C_{A1}$ ， $C_{A2}$ ， $C_{B1}$ ， $C_{B2}$  发生的概率分别为  $\frac{16}{20}$ ， $\frac{4}{20}$ ， $\frac{10}{20}$ ， $\frac{8}{20}$ 。故  $P(C_{A1}) = \frac{16}{20}$ ，

$$P(C_{A2}) = \frac{4}{20}, P(C_{B1}) = \frac{10}{20}, P(C_{B2}) = \frac{8}{20}, \text{ 故 } P(C) = \frac{10}{20} \times \frac{16}{20} + \frac{8}{20} \times \frac{4}{20} = 0.48.$$

【考点定位】1、茎叶图和特征数；2、互斥事件和独立事件。

【名师点睛】本题考查茎叶图、互斥事件和独立事件，根据茎叶的密集程度比较平均值大小，如果密集主干部位在高位，那么平均值大；方差看它们数字偏离程度，偏离越大则方差大。读懂所求概率事件包含的含义，利用分类讨论思想将事件分解为几个互斥的情况来求概率。