湖南师大附中2023届高三月考试卷(二)

数学

第I卷

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1．若以集合A的四个元素a,b,c,d为边长构成一个四边形，则这个四边形可能是

A．梯形　　B．平行四边形　　C．菱形　　D．矩形

2．在复平面内，复数z所对应的点的坐标为$(1,-1)$，则$z\cdot\overline{z}=$

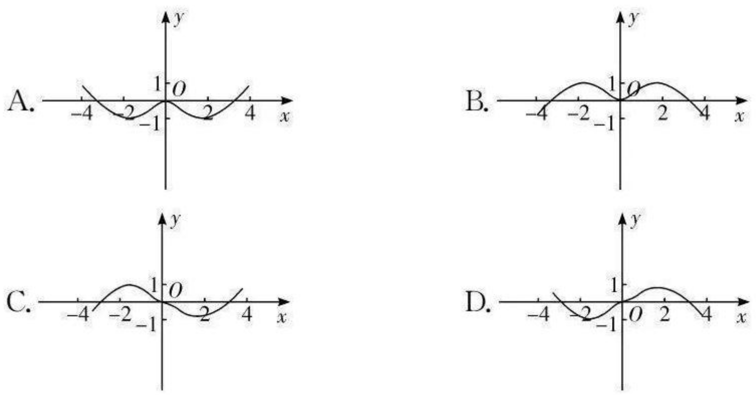
A．2　　B．$-2\mathrm{i}$　　C．$\sqrt{2}$　　D．$2\mathrm{i}$

3．设点A,B,C不共线，则“$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$的夹角是锐角”是“$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|>|\overrightarrow{BC}|$”的

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

4．函数$f(x)=\left(\dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{x}}-1\right)\cdot\sin x$的图象大致形状为



5．圆内接四边形$ABCD$中，$AD=2,CD=4,BD$是圆的直径，则$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$等于

A．12　　B．−12　　C．20　　D．−20

6．在三棱锥$P-ABC$中，$PA\perp$底面$ABC,PA=2$，底面ABC是边长为$2\sqrt{3}$的正三角形，M为AC的中点，球O是三棱锥$P-ABM$的外接球，若D是球O上一点，则三棱锥$D-PAC$的体积的最大值是

A．2　　B．$2\sqrt{3}$　　C．$\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$　　D．$\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$

7．函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi| \bullet \frac{\pi}{2}\right)$，已知 $\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$ 为 $f(x)$ 图象的一个对称中心，直线 $x=\frac{13\pi}{12}$ 为 $f(x)$ 图象的一条对称轴，且 $f(x)$ 在 $\left[\frac{13\pi}{12},\frac{19\pi}{12}\right]$ 上单调递减．记满足条件的所有 ω 的值的和为 S，则 S 的值为

A．$\frac{12}{5}$　　B．$\frac{8}{5}$　　C．$\frac{16}{5}$　　D．$\frac{18}{5}$

8.古希腊数学家欧几里得在《几何原本》中描述了圆锥曲线的共性，并给出了圆锥曲线的统一定义,只可惜对这一定义欧几里得没有给出证明.经过了 500 年,到了 3 世纪,希腊数学家帕普斯在他的著作《数学汇篇》中，完善了欧几里得关于圆锥曲线的统一定义,并对这一定义进行了证明.他指出,到定点的距离与到定直线的距离的比是常数 e 的点的轨迹叫做圆锥曲线;当 $0<e<1$ 时，轨迹为椭圆;当 $e=1$ 时,轨迹为抛物线;当 $e>1$ 时，轨迹为双曲线:现有方程 $m\left(x^2+y^2+2y+1\right)=\left(x-2y+3\right)^2$ 表示的曲线是双曲线,则 m 的取值范围为

A. $(0,1)$　　B. $(1,+\infty)$　　C. $(0,5)$　　D. $(5,+\infty)$

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分,有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分.

9．已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1,a_n+a_{n+1}=2^n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，则下列结论中正确的是

A．$a_4=5$

B．$\{a_n\}$ 为等比数列

C．$a_1+a_2+...+a_{2021}=2^{2022}-3$

D．$a_1+a_2+...+a_{2022}=\frac{2^{2023}-2}{3}$

10．已知 A,B 是两个随机事件，$0<P(A)<1$，下列命题正确的是

A．若 A,B 相互独立，$P(B|A)=P(B)$

B．若事件 $A\subseteq B$，则 $P(B|A)=1$

C．若 A,B 是对立事件，则 $P(B|A)=1$

D．若 A,B 是互斥事件，则 $P(B|A)=0$

11．已知 $(1+2x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，下列结论正确的是

A. $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n=3^n$

B. 当 $n=5, x=\sqrt{3}$ 时，设 $(1+2x)^n=a+b\sqrt{3}\left(a, b \in \mathbf{N}^*\right)$，则 $a=b$

C. 当 $n=12$ 时，$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中最大的是 a_7

D. 当 $n=12$ 时，$\frac{a_1}{2}-\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{2^3}-\frac{a_4}{2^4}+\cdots+\frac{a_{11}}{2^{11}}-\frac{a_{12}}{2^{12}}=1$

12. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足：当 $x \neq 0$ 时，$f(1+x)=2f(1-x)$，且当 $x>0$ 时，

$f'(1+x)+f'(1-x)<0$，则下列说法正确的是

A. $f(1)=0$

B. $f(x)$ 在 $(-\infty, 1]$ 上单调递减

C. 若 $x_1<x_2, f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$，则 $x_1+x_2<2$

D. 若 x_1, x_2 是 $g(x)=f(x)-\cos \pi x$ 在区间 $(0,2)$ 内的两个零点, 且 $x_1<x_2$, 则 $1<\frac{f\left(x_2\right)}{f\left(x_1\right)}<2$

第II卷

三、填空题：本题共 4 小题, 每小题 5 分，共 20 分.

13. 将 5 名北京冬奥会志愿者分配到花样滑冰、短道速滑和冰壶 3 个项目进行培训, 每名志愿者只分配到 1 个项目, 每个项目至少分配 1 名志愿者，则不同的分配方案共有_____种.

14. 已知抛物线 $C: x^2=-8y$ 的焦点为 F, 过 F 的直线 l 与抛物线 C 相交于 A, B 两点, 分别过 A, B 两点作 C 的切线 l_1, l_2, 且 l_1, l_2 相交于点 P, 则 $\triangle PAB$ 面积的最小值为_____.

15. 已知四面体 $ABCD$ 的各条棱长都为 2, 其顶点都在球 O 的表面上, 点 E 满足 $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$, 过点 E 作平面 α, 则平面 α 截球 O 所得截面面积的取值范围是_____.

16. 已知函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$ 对称, 且 $f(0)>f\left(\frac{\pi}{6}\right)$，若 $f(x)$ 在 $[0, t)$ 上没有最大值，则实数 t 的取值范围是 _____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

$\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c，已知 $\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+A\right)+\cos A=\frac{5}{4}$.

(1) 求 A;

(2) 若 $b-c=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，证明: $\triangle ABC$ 是直角三角形.

18.（本小题满分 12 分）

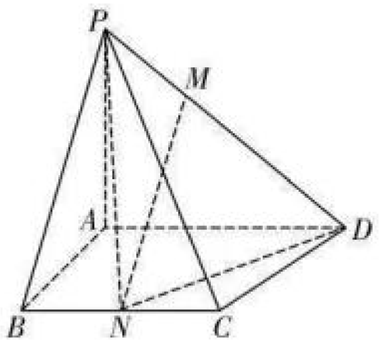
已知数列$\{a_n\}$中，$a_n>0,S_n$是数列$\{a_n\}$的前n项和，且$a_n+\dfrac{2}{a_n}=2S_n$.

(1) 求S_2,S_3，并求数列$\{a_n\}$的通项公式a_n；

(2) 设$b_n=\dfrac{1}{S_n+S_{n+2}}$，数列$\{b_n\}$的前$n$项和为$T_n$，若$2\sqrt{2}T_n-k$ [illegible] 0对任意的正整数n都成立，求实数k的取值范围.

19.（本小题满分 12 分）

如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为直角梯形，其中$AD//BC,AD=3,AB=BC=2$，$PA\perp$平面$ABCD$，且$PA=3$，点M在棱PD上，点N为BC中点.



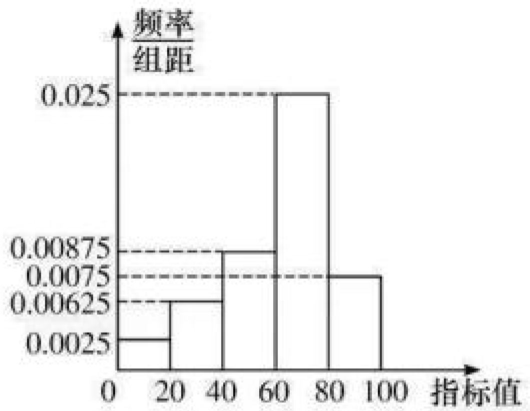
(1)证明：若$DM=2MP$，直线$MN//$平面PAB；

(2)求二面角$C-PD-N$的正弦值；

(3)是否存在点M，使NM与平面PCD所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{2}}{6}$？若存在求出$\dfrac{PM}{PD}$值；若不存在，说明理由.

20.（本小题满分 12 分）

为了检测某种抗病毒疫苗的免疫效果，需要进行动物与人体试验. 研究人员将疫苗注射到 200 只小白鼠体内，一段时间后测量小白鼠的某项指标值，按$[0,20),[20,40),[40,60),[60,80),[80,100]$分组，绘制频率分布直方图如图所示. 试验发现小白鼠体内产生抗体的共有 160 只，其中该项指标值不小于 60 的有 110 只.



假设小白鼠注射疫苗后是否产生抗体相互独立.

(1)填写下面的2×2列联表，并根据列联表及$\alpha=0.05$的独立性检验,判断能否认为注射疫苗后小白鼠产生抗体与指标值不小于 60 有关.

单位：只

抗体	指标值		合计
	小于 60	不小于 60	
有抗体			
没有抗体			
合计			

(2)为检验疫苗二次接种的免疫抗体性,对第一次注射疫苗后没有产生抗体的 40 只小白鼠进行第二次注射疫苗,结果又有 20 只小白鼠产生抗体.

(ⅰ)用频率估计概率,求一只小白鼠注射 2 次疫苗后产生抗体的概率p;

(ⅱ)以(i)中确定的概率p作为人体注射 2 次疫苗后产生抗体的概率，进行人体接种试验,记n个人注射 2 次疫苗后产生抗体的数量为随机变量X．试验后统计数据显示，当$X=99$时，$P(X)$取最大值，求参加人体接种试验的人数n及$E(X)$.

参考公式：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$（其中$n=a+b+c+d$为样本容量）.

α	0.50	0.40	0.25	0.15	0.100	0.050	0.025
x_α	0.455	0.708	1.323	2.072	2.706	3.841	5.024

21.（本小题满分 12 分）

已知$A(-2\sqrt{2},0),B(2\sqrt{2},0)$，直线$PA,PB$的斜率之积为$-\dfrac{3}{4}$，记动点$P$的轨迹为曲线$C$.

(1)求C的方程;

(2) 直线l与曲线C交于M,N两点，O为坐标原点，若直线OM,ON的斜率之积为$-\dfrac{3}{4}$，证明：$\triangle MON$的面积为定值.

22.（本小题满分 12 分）

已知函数$f(x)=x\ln x,g(x)=x^2-1$.

(1) 求证：当a开$\frac{1}{2}$时，$|f(x)|\bullet a|g(x)|$；

(2) 已知函数$h(x)=|f(x)|-b$有 3 个不同的零点$x_1,x_2,x_3\left(x_1<x_2<x_3\right)$.

(i) 求证：$x_1^2+x_2^2>\frac{2}{e^2}$；

(ii) 求证：$\sqrt{1+2b}-\sqrt{1-2b}<x_3-x_2<be$（$e=2.71828$是自然对数的底数）.

湖南师大附中 2023 届高三月考试卷(二)

数学参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	A	C	A	B	C	A	C	AD	ABD	AD	ACD

13. 150

14. 16

15. $\left[\frac{8}{9}\pi,\frac{3}{2}\pi\right]$

16. $\left(\frac{5\pi}{6},\frac{11\pi}{12}\right]$

17.【解析】(1) 因为$\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+A\right)+\cos A=\frac{5}{4}$，所以$\sin^2 A+\cos A=\frac{5}{4}$，

即$1-\cos^2 A+\cos A=\frac{5}{4}$，

解得$\cos A=\frac{1}{2}$，又$0<A<\pi$，

所以$A=\frac{\pi}{3}$；

(2) 因为$A=\frac{\pi}{3}$，所以$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$，

即$b^2+c^2-a^2=bc$①，

又$b-c=\frac{\sqrt{3}}{3}a$②，　将②代入①得，$b^2+c^2-3(b-c)^2=bc$，

即$2b^2+2c^2-5bc=0$，而$b>c$，解得$b=2c$，

所以$a=\sqrt{3}c$，

故$b^2=a^2+c^2$，

即$\triangle ABC$是直角三角形.

18.【解析】(1) 在$a_n+\frac{2}{a_n}=2S_n$中,

$n=1$, 则$a_1+\frac{2}{a_1}=2S_1$, 即$S_1+\frac{2}{S_1}=2S_1$, 得$S_1=\sqrt{2}$,

由$a_n+\frac{2}{a_n}=2S_n$得:

当$n\geq 2$时, $S_n-S_{n-1}+\frac{2}{S_n-S_{n-1}}=2S_n$,

化简得$\left(S_n+S_{n-1}\right)\cdot\left(S_n-S_{n-1}\right)=2$,

即$S_n^2-S_{n-1}^2=2\left(n\geq 2\right)$,

所以数列$\left\{S_n^2\right\}$是以 2 为首项,2 为公比的等差数列,

所以$S_n^2=2+2\left(n-1\right)=2n$.

又因为$a_n>0$, 所以$S_n=\sqrt{2n}$,

所以$S_2=2$, $S_3=\sqrt{6}$.

当$n\geq 2$时, $a_n=S_n-S_{n-1}=\sqrt{2n}-\sqrt{2\left(n-1\right)}=\sqrt{2}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$,

对$a_1=\sqrt{2}$也成立,

所以数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式为$a_n=\sqrt{2}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$.

(2) 因为$b_n=\frac{1}{S_n+S_{n+2}}=\frac{1}{\sqrt{2n}+\sqrt{2\left(n+2\right)}}=\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{2\sqrt{2}}$,

所以$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{3}-1+2-\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}+\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)$

$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}-1-\sqrt{2}\right)$.

因为$T_{n+1}-T_n=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}\right)>0$,

所以T_n在$n\in N^*$上单调递增,

所以T_n的最小值为$T_1=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{3}-1\right)$.

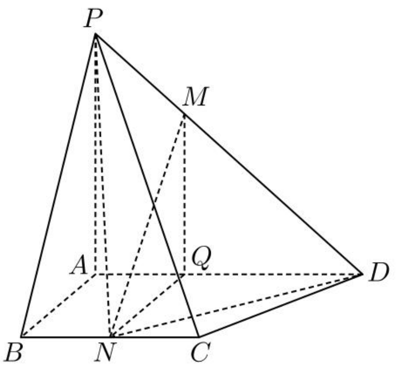
因为$2\sqrt{2}T_n-k\geq 0$对任意的正整数n都成立,

所以$k\leq\left(2\sqrt{2}T_n\right)_{\min}$,

即$k\leq 2\sqrt{2}T_1=\sqrt{3}-1$.

所以实数k的取值范围是$k\leq\sqrt{3}-1$.

19.【解析】（1）



如图所示，在线段AD上取一点Q，使$AQ=\frac{1}{3}AD$，连接MQ，NQ，

$\because DM=2MP$，

$\therefore QM//AP$，

又$AD=3$，$AB=BC=2$，

$\therefore AQ\underset{=}{//}BN$，四边形$ABNQ$为平行四边形，

$\therefore NQ//AB$，

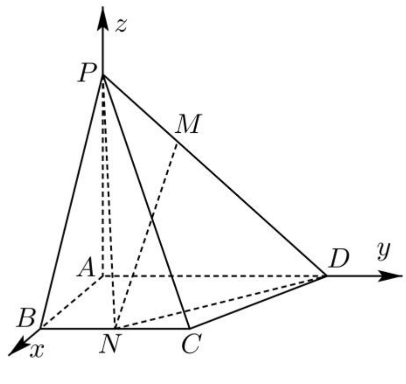
又$NQ\cap MQ=Q$，$AB\cap AP=A$，

所以平面$MNQ//$平面PAB，

$\because MN\subset$平面MNQ，

$\therefore MN//$平面PAB；

（2）



如图所示，以点A为坐标原点，以AB为x轴，AD为y轴，AP为z轴建立空间直角坐标系，

则$B(2,0,0)$，$C(2,2,0)$，$D(0,3,0)$，$P(0,0,3)$，

又N是BC中点，则$N(2,1,0)$，

所以$\overrightarrow{PD}=(0,3,-3)$，$\overrightarrow{CD}=(-2,1,0)$，$\overrightarrow{DN}=(2,-2,0)$，

设平面PCD的法向量$\vec{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{PD}\cdot\vec{n}_1=3y_1-3z_1=0\\ \overrightarrow{CD}\cdot\vec{n}_1=-2x_1+y_1=0\end{cases}$，令$x_1=1$，则$\vec{n}_1=(1,2,2)$，

设平面PND的法向量$\vec{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{PD}\cdot\vec{n}_2=3y_2-3z_2=0\\ \overrightarrow{DN}\cdot\vec{n}_2=2x_2-2y_2=0\end{cases}$，令$x_2=1$，则$\vec{n}_2=(1,1,1)$，

所以$\cos\langle\vec{n}_1,\vec{n}_2\rangle=\dfrac{1+2+2}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$，

则二面角$C-PD-N$的正弦值为$\sqrt{1-\left(\dfrac{5\sqrt{3}}{9}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{9}$；

（3）

存在，$\dfrac{PM}{PD}=\dfrac{1}{3}$或$\dfrac{PM}{PD}=1$

假设存在点M，设$\dfrac{PM}{PD}=\lambda$，即$\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PD}$，$\lambda\in[0,1]$，

由（2）得$D(0,3,0)$，$P(0,0,3)$，$N(2,1,0)$，且平面PCD的法向量$\vec{n}_1=(1,2,2)$，

则$\overrightarrow{PD}=(0,3,-3)$，$\overrightarrow{PM}=(0,3\lambda,-3\lambda)$，

则$M(0,3\lambda,3-3\lambda)$，

$\overrightarrow{MN}=(2,1-3\lambda,3\lambda-3)$，

$$\sin\theta=\left|\cos\langle\overrightarrow{MN},\vec{n}_1\rangle\right|=\left|\frac{2+2(1-3\lambda)+2(3\lambda-3)}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+(1-3\lambda)^2+(3\lambda-3)^2}}\right|=\frac{\sqrt{2}}{6}$$

解得$\lambda=\dfrac{1}{3}$或$\lambda=1$，

故存在点M，此时$\dfrac{PM}{PD}=\dfrac{1}{3}$或$\dfrac{PM}{PD}=1$.

20.【解析】（1）由频率分布直方图，知 200 只小白鼠按指标值分布为：

在$[0,20)$内有$0.0025\times20\times200=10$（只）；在$[20,40)$内有$0.00625\times20\times200=25$（只）；

在$[40,60)$内有$0.00875\times20\times200=35$（只）；在$[60,80)$内有$0.025\times20\times200=100$（只）；

在$[80,100]$内有$0.0075\times20\times200=30$（只）.

由题意，有抗体且指标值小于 60 的有 50 只；而指标值小于 60 的小白鼠共有$10+25+35=70$只，所以指标值小于 60 且没有抗体的小白鼠有 20 只，同理，指标值不小于 60 且没有抗体的小白鼠有 20 只，故列联表如下：

抗体	指标值		合计
	小于 60	不小于 60	
有抗体	50	110	160
没有抗体	20	20	40
合计	70	130	200

零假设为H_0：注射疫苗后小白鼠产生抗体与指标值不小于 60 无关联.

根据列联表中数据，得$\chi^2=\dfrac{200\times(50\times20-20\times110)^2}{160\times40\times70\times130}\approx4.945>3.841$，

根据$\alpha=0.05$的独立性检验，推断H_0不成立，即认为注射疫苗后小白鼠产生抗体与指标值不小于 60 有关，此推断犯错误的概率不大于 0.05；

（2）

①令事件$A=$“小白鼠第一次注射疫苗产生抗体”，事件$B=$“小白鼠第二次注射疫苗产生抗体”，事件$C=$“小白鼠注射 2 次疫苗后产生抗体”，

记事件 A，B，C发生的概率分别为$P(A)$，$P(B)$，$P(\mathrm{C})$，

则$P(A)=\dfrac{160}{200}=0.8$，$P(B)=\dfrac{20}{40}=0.5$，$P(C)=1-P(\bar{A})P(\bar{B})=1-0.2\times0.5=0.9$，

所以一只小白鼠注射 2 次疫苗后产生抗体的概率为 0.9.

②由题意，知随机变量$X\sim B(n,0.9)$，$P(X=k)=\mathrm{C}_n^k\times0.9^k\times0.1^{n-k}(k=0,1,2,\cdots,n)$，

因为$P(X=99)$最大，

所以由$\begin{cases}P(X=99)\geq P(X=98)\\P(X=99)\geq P(X=100)\end{cases}$可得$\begin{cases}\mathrm{C}_n^{99}\times0.9^{99}\times0.1^{n-99}\geq\mathrm{C}_n^{98}\times0.9^{98}\times0.1^{n-98}\\\mathrm{C}_n^{99}\times0.9^{99}\times0.1^{n-99}\geq\mathrm{C}_n^{100}\times0.9^{100}\times0.1^{n-100}\end{cases}$，

解得$109\leq n\leq\dfrac{991}{9}$，因 n 是整数，故$n=109$或$n=110$，

所以接受接种试验的人数为 109 或 110,

当接种人数为 109 时，$E(X)=np=109\times0.9=98.1$；

当接种人数为 110 时，$E(X)=np=110\times0.9=99$

21.【解析】(1)设$P(x,y)$,则直线PA的斜率$k_{PA}=\dfrac{y}{x+2\sqrt{2}}(x\neq-2\sqrt{2})$,直线$PB$的斜率 $k_{PB}=\dfrac{y}{x-2\sqrt{2}}(x\neq2\sqrt{2})$，

由题意$k_{PA}\cdot k_{PB}=\dfrac{y}{x+2\sqrt{2}}\cdot\dfrac{y}{x-2\sqrt{2}}=\dfrac{y^2}{x^2-8}=-\dfrac{3}{4}$，

化简得 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{6}=1(x\neq\pm2\sqrt{2})$；

（2）

直线l的斜率存在时，可设其方程为$y=kx+m$，

联立$\begin{cases}y=kx+m,\\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{6}=1,\end{cases}$化简得$\left(3+4k^2\right)x^2+8kmx+4m^2-24=0$，

设$M\left(x_1,y_1\right),N\left(x_2,y_2\right)$，

则$\Delta=(8km)^2-4\left(3+4k^2\right)\left(4m^2-24\right)=48\left(8k^2+6-m^2\right)>0$，

$x_1+x_2=-\frac{8km}{3+4k^2},x_1x_2=\frac{4m^2-24}{3+4k^2}$，

所以 $k_{OM}\cdot k_{ON}=\frac{y_1y_2}{x_1x_2}=\frac{\left(kx_1+m\right)\left(kx_2+m\right)}{x_1x_2}=\frac{k^2x_1x_2+km\left(x_1+x_2\right)+m^2}{x_1x_2}=\frac{\frac{4m^2k^2-24k^2-8k^2m^2+3m^2+4k^2m^2}{3+4k^2}}{\frac{4m^2-24}{3+4k^2}}$

$=\frac{-24k^2+3m^2}{4m^2-24}=-\frac{3}{4}$

化简得$m^2=4k^2+3$

则$|MN|=\sqrt{1+k^2}\left|x_1-x_2\right|=\frac{\sqrt{1+k^2}\sqrt{48\left(8k^2+6-m^2\right)}}{3+4k^2}=\frac{4\sqrt{3}\sqrt{1+k^2}\sqrt{4k^2+3}}{4k^2+3}=\frac{4\sqrt{3}\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{3+4k^2}}$，

又O到MN的距离$d=\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{\sqrt{4k^2+3}}{\sqrt{1+k^2}}$，

所以$S_{\triangle OMN}=\frac{1}{2}|MN|\cdot d=\frac{1}{2}\cdot\frac{4\sqrt{3}\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{3+4k^2}}\cdot\frac{\sqrt{3+4k^2}}{\sqrt{1+k^2}}=2\sqrt{3}$，为定值.

当直线l的斜率不存在时，可设 $M\left(x_0,y_0\right),N\left(x_0,-y_0\right)$，

则$k_{CM}\cdot k_{ON}=-\frac{y_0^2}{x_0^2}=-\frac{3}{4}$，且$\frac{x_0^2}{8}+\frac{y_0^2}{6}=1$，解得$x_0^2=4,y_0^2=3$，此时$S_{\triangle OMN}=2\times\frac{1}{2}\times\left|x_0y_0\right|=2\sqrt{3}$，

综上，$\triangle OMN$的面积为定值$2\sqrt{3}$.

22.【解析】（1）

①当 $x\geq1,g(x)\geq0,f(x)\geq0$，即证 $f(x)\leq ag(x)$，

令 $F(x)=x\ln x-a\left(x^2-1\right),F'(x)=1+\ln x-2ax$，

令 $G(x)=F'(x)$，则当$x>1$时$G'(x)=\frac{1}{x}-2a<0$，所以$F'(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减，

则有当$x>1$时$F'(x)<F'(1)=1-2a\leq0$，所以$F(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减，

所以当$x\geq1$ $F(x)\leq F(1)=0$，

$\therefore f(x) \le ag(x)$ 成立

②当 $0<x<1$ 时， $g(x)<0, f(x)<0$ ，即证 $-f(x) \le -ag(x), f(x) \ge ag(x)$ ，

令 $F(x)=x\ln x-a\left(x^2-1\right), F'(x)=1+\ln x-2ax \le 1+\ln x-x$

设 $\varphi(x)=1+\ln x-x(0<x<1)$ ，则 $\varphi'(x)=\dfrac{1}{x}-1>0$ ，所以 $\varphi(x)=1+\ln x-x$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，所以 $1+\ln x-x<0$

所以 $F'(x)<0$ ，

$\therefore F(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减， $F(x) \ge F(1)=0$ ，即 $f(x) \ge ag(x)$ ，

综合①②当 $a \ge \dfrac{1}{2}$ 时， $|f(x)| \le a|g(x)|$

（2）

$h(x)=|f(x)|-b=\begin{cases}-x\ln x-b, & 0<x \le 1 \\ x\ln x-b, & x>1\end{cases}$ ，

当 $0<x \le 1, h'(x)=-(\ln x+1), \therefore h(x)$ 在 $\left(0, \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}, 1\right)$ 单调递减，

当 $x>1, h'(x)=\ln x+1, \therefore h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

又函数 $h(x)=|f(x)|-b$ 有 3 个不同的零点 $x_1, x_2, x_3\left(x_1<x_2<x_3\right)$ ，

所以 $f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)>0$ ， $f(1)<0$ ，

$\therefore 0<x_1<\dfrac{1}{\mathrm{e}}<x_2<1<x_3, 0<b<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

（i）令 $H(x)=h(x)-h\left(\dfrac{2}{\mathrm{e}}-x\right), x \in\left(0, \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$ ，

$H'(x)=h'(x)+h'\left(\dfrac{2}{\mathrm{e}}-x\right)=-(\ln x+1)-\left[\ln\left(\dfrac{2}{\mathrm{e}}-x\right)+1\right]=-\left\{\ln\left[-\left(x-\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^2+\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right]+2\right\}>0$ $H(x)$ 在 $\left(0, \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 上单调递增，又

$x_1 \in\left(0, \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right), \therefore H\left(x_1\right)=h\left(x_1\right)-h\left(\dfrac{2}{\mathrm{e}}-x_1\right)<H\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=0$

$\therefore h\left(x_2\right)=h\left(x_1\right)<h\left(\dfrac{2}{\mathrm{e}}-x_1\right)$ ，

又 $\because \dfrac{2}{e}-x_1>\dfrac{1}{\mathrm{e}}, x_2>\dfrac{1}{\mathrm{e}}, h(x)$ 在 $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}, 1\right)$ 上单调递减，

$\therefore x_2>\dfrac{2}{\mathrm{e}}-x_1$ ，即 $x_1+x_2>\dfrac{2}{\mathrm{e}}, \therefore x_1^2+x_2^2>\dfrac{1}{2}\left(x_1+x_2\right)^2>\dfrac{1}{2} \times \dfrac{4}{\mathrm{e}^2}=\dfrac{2}{\mathrm{e}^2}$

（ii）$y=x\ln x$ 在 $x=1$ 处的切线方程 $y=x-1$ 与 $y=b$ 交点的横坐标 $x_3'=b+1$ ，

过点 $A\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}, \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 和 $B(1,0)$ 的直线方程 $y=\dfrac{1}{1-\mathrm{e}}(x-1)$ 与 $y=b$ 交点的横坐标 $x_2'=1+b(1-\mathrm{e})$ ，

$\therefore x_3-x_2<x_3'-x_2'=b+1-1-b(1-\mathrm{e})=b\mathrm{e}$

由（1）取 $a=\dfrac{1}{2}$ ，

则 $a|g(x)|=\frac{1}{2}\left|x^2-1\right|$ 与 $y=b$ 在 y 轴右侧交点横坐标为 $x_4=\sqrt{1-2b}, x_5=\sqrt{1+2b}$，

$\therefore x_3-x_2>x_5-x_4=\sqrt{1+2b}-\sqrt{1-2b}$，

综上：$\sqrt{1+2b}-\sqrt{1-2b}<x_3-x_2<b\mathrm{e}$