利用函数奇偶性巧解几类数学题

张湘君

函数奇偶性是函数的重要性质. 从本质属性上看, 有两个侧面: “形”的特征和“数”的表示, “数”与“形”有着密切的联系. 在“形”方面, 奇函数关于原点对称, 偶函数关于*y*轴对称; 而在“数”方面, 则是利用函数解析式描述函数图象的对称特征, 对于函数的定义域内的任意一个, 都有, 就称为偶函数; 若都有, 就称为奇函数.

从知识的网络结构上看, 函数的奇偶性既是函数概念的延续和拓展, 又是后续研究指数函数、对数函数、三角函数的奇偶性等内容的基础, 在研究各种具体函数的性质和应用、解决各种问题中都有着广泛的应用.

1 求函数值及最值

例1(2014.湖南理科.3) 已知分别是定义在上的偶函数和奇函数, 且, 则( )

A.  B.  C. 1 D. 3

分析: 要求的值, 需要对表达式中的*x*赋适当的值, 考虑到是奇函数, 是偶函数, 于是, 所以令得. 因为分别是定义在上的偶函数和奇函数, 则, 所以. 选C.

例2 已知, 设的最大值为*M*, 最小值为*N*, 则.

分析: 注意到区间是对称的, 且是奇函数, 我们可以猜测或其表达式中的部分是奇函数, 于是需要先对作变形处理, 得到, 所以. 令, 则在上是奇函数, 于是. 所以.

2 求函数的解析式

例3(2014.全国I理科.3) 设函数的定义域为, 且是奇函数, 是偶函数, 则下列结论中正确的是( )

A. 是偶函数 　　　 B.  是奇函数

C. 是奇函数 D. 是奇函数

分析: 此题需要我们判断选项中四个函数的奇偶性, 由于是奇函数, 则是偶函数, 且由于是偶函数, 则是偶函数. 再逐个判断得到是奇函数. 选C.

例4(2014.湖北文科.9) 已知是定义在上的奇函数, 当时, . 则函数的零点的集合为( )

A.  B.  C.  D. 

分析: 要求解的零点, 由于的表达式可以利用其是奇函数求出, 于是我们可以先求出的表达式, 再求其零点. 利用是奇函数求出的表达式, 则, 进而求出的零点. 选D.

3 判断函数的对称性

例5(2014.全国II理科.15) 已知偶函数在单调递减, . 若, 则的取值范围是\_\_\_\_\_\_.

分析: 欲求解不等式, 而我们并不知道的表达式, 于是我们必须利用的单调性, 将其转化为有关*x*的不等式. 因为是偶函数, 所以不等式, 又因为在单调递减, 于是. 填.

例6 若是偶函数, 则的图象( )

A. 关于*x*轴对称 B. 关于*y*轴对称

C. 关于原点对称 D. 关于直线对称

分析: 如果记, 则知为奇函数是我们熟知的. 又因为是偶函数, 故有是奇函数. 选C.

4 求参数值或范围

例7(2014.湖北理科.10) 已知函数是定义在上的奇函数, 当时, , 若, , 则实数的取值范围为( )

A.  B.  C.  D. 

分析: 注意到实际上是向右平移一个单位得到的, 所以要使, , 只需有的图象恒在的下方, 即将的图象向右平移一个单位的图象恒在的下方. 当时, , 由是奇函数, 可作出的图象, 并向右平移一个单位得到的图象, 于是, 解得. 故选B.

例8(2013.上海理科.12) 设为实常数, 是定义在*R*上的奇函数, 当时, , 若对一切成立, 则的取值范围为\_\_\_\_\_\_.

分析: 由于对一切成立, 则这是一个已经变量分离的恒成立问题, 所以我们只需要求出的最小值即可. 先利用是奇函数求出的解析式, 将对一切恒成立转化为函数的最小值, 再利用基本不等式求出的最小值, 解不等式求出*a*的取值范围. 当时, ; 当时,  当时取等号, 则, 解得或, 综上所述, .

（本文主要内容曾发表于《教育测量与评价》2014年第9期）